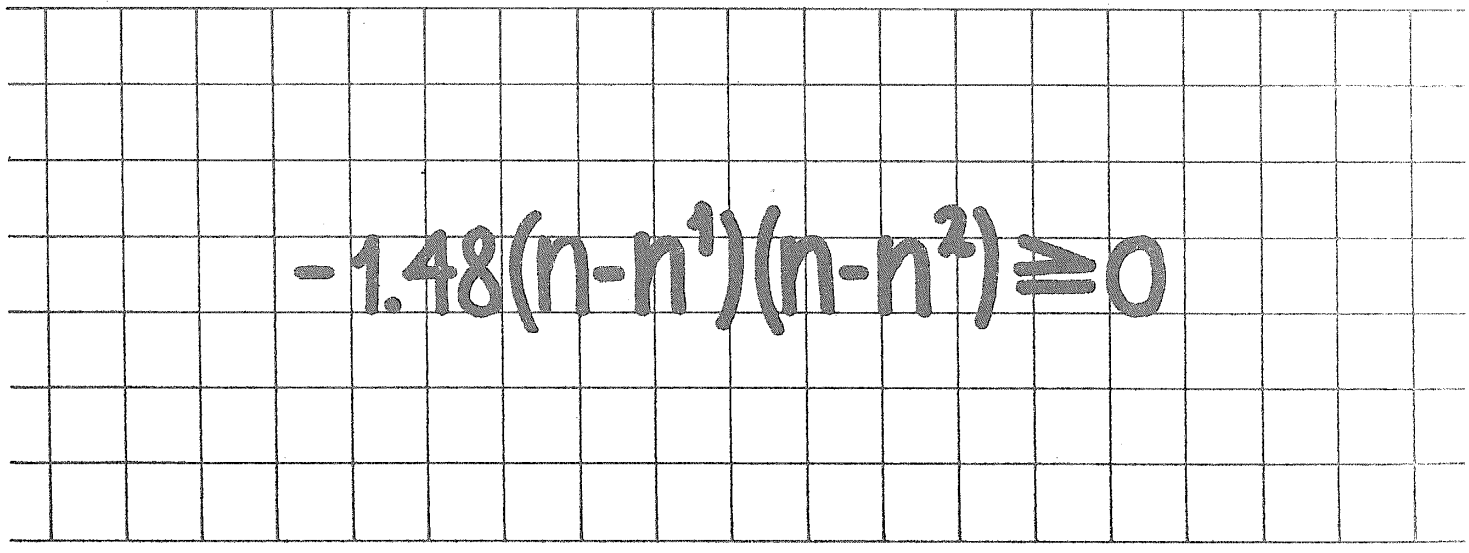
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Obras que integran el bloque 2 *(Álgebra. Modelos)*

1. La ecuación como modelo matemático
2. Ecuaciones de primer grado
3. Sistemas de ecuaciones de primer grado
4. Desigualdades de primer grado
5. Ecuaciones de segundo grado
6. Desigualdades de segundo grado
7. La relación como modelo matemático
8. Funciones
9. Funciones exponenciales
10. Funciones logarítmicas
11. Ecuaciones, desigualdades y sistemas. Soluciones gráficas
12. ***Resolución de problemas***

ANUIES

Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



Módulos de matemáticas

Bloque 2

Àlgebra. Modelos

Módulo 12

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Conrado Flores García

EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia,
España, Puerto Rico, Venezuela

Revisión técnica: *Myriam P. Acuña Monsalve*
Licenciada en economía,
Universidad Nacional
Autónoma de México

La presentación y disposición en conjunto de
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado, la grabación, o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1985, Editorial Trillas, S. A. de C. V.
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, mayo 1985
ISBN 968-24-1526-8

Impreso en México

Esta obra se terminó de imprimir
el día 28 de mayo de 1985,
en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se encuadernó en Ediciones Pegaso, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 4, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO ET KC 100

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMATICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; pará tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo ☞ , el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquellos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

12.1 Un procedimiento para resolver problemas 9

12.2 Problemas que conducen a ecuaciones de primer grado con una incógnita, como modelo matemático 23

12.3 Problemas que conducen a ecuaciones de segundo grado con una incógnita, como modelo matemático 40

12.4 Problemas que conducen a sistemas de dos o más ecuaciones de primer grado, como modelo matemático 50

12.5 Problemas que conducen a una desigualdad de primer grado con una incógnita, como modelo matemático 62

12.6 Problemas que conducen a desigualdades de segundo grado, como modelo matemático 73

12.7 Problemas que conducen a ecuaciones exponenciales o logarítmicas, como modelo matemático 85

12.8 Problemas que conducen a un sistema de desigualdades lineales, como modelo matemático 94

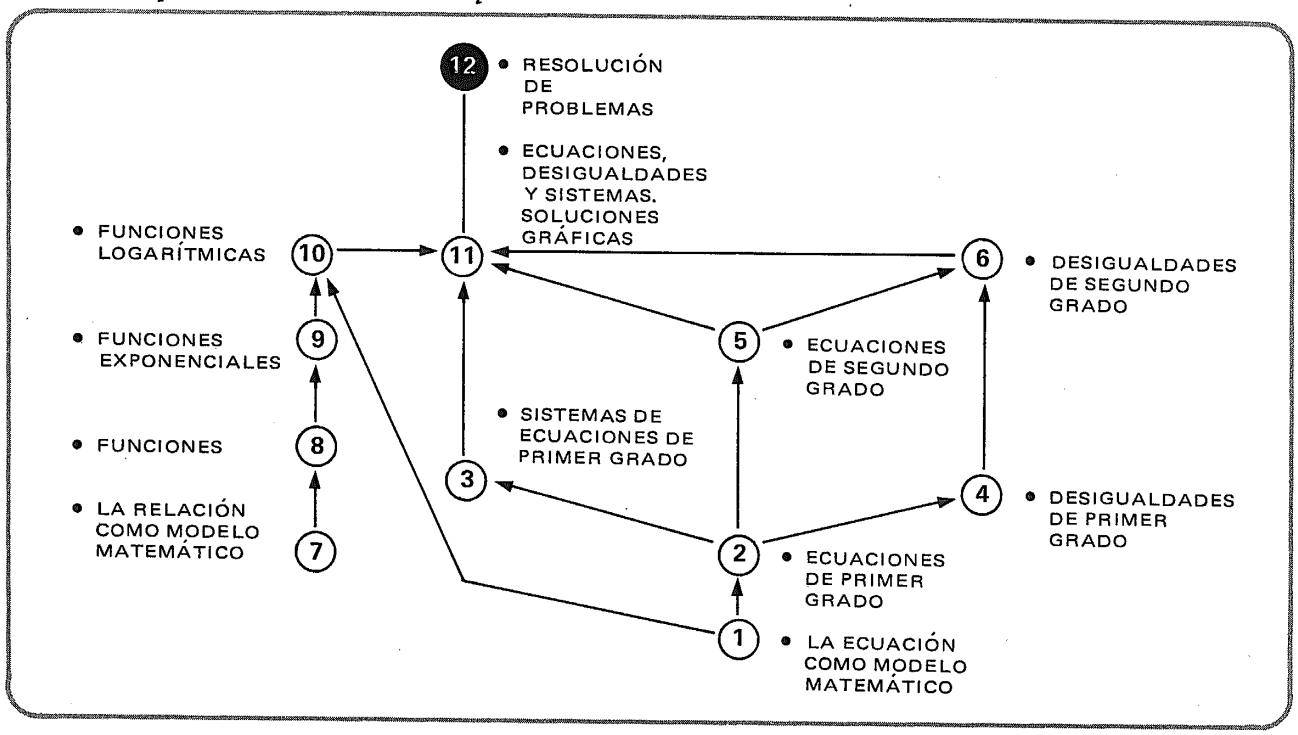
OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 2. Álgebra. Modelos

Objetivos: establecer, resolver y aplicar a situaciones reales las siguientes clases de modelos matemáticos:

- ecuaciones y desigualdades (lineales o cuadráticas)
- sistemas de ecuaciones o desigualdades
- relaciones y funciones

Esquema estructural del bloque 2



Módulo 12. Resolución de problemas

Objetivos: resolver problemas en que una situación real puede ser representada por alguna forma de modelo matemático de tipo algebraico, exponencial o logarítmico

Prerrequisitos:

	Bloque	Módulo(s)
• Resolución de		
– ecuaciones de primer grado	2	2
– sistemas de ecuaciones de primer grado	2	3
– desigualdades de primer grado	2	4
– ecuaciones de segundo grado	2	5
– desigualdades de segundo grado	2	6
• Concepto de relación	2	7
• Concepto de función	2	8
• Funciones y ecuaciones exponenciales	2	9
• Funciones y ecuaciones logarítmicas	2	10
• Resolución gráfica de ecuaciones, desigualdades y sistemas	2	11

12.1

Un procedimiento para resolver problemas

1

En nuestro quehacer cotidiano
o en el desempeño de nuestro
trabajo se nos pueden presentar
problemas
susceptibles de ser abordados
matemáticamente.

2

En el punto de partida
tenemos siempre
una

situación

a
la que llamaremos:

situación real.

3

En términos generales,
la primera parte
de nuestro problema
consistirá en
construir un

modelo matemático

a partir de
la situación real.

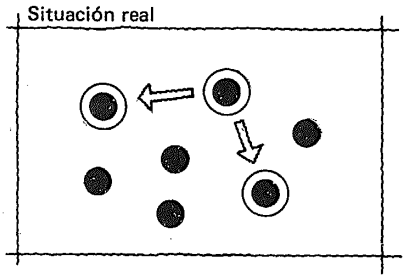
situación real

↓

modelo matemático

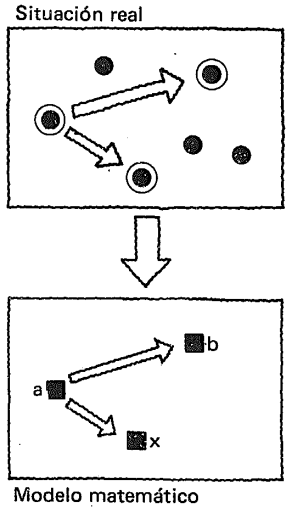
4

En primer lugar,
tendremos que **examinar**
cuidadosamente la
situación real
para **identificar** los
elementos esenciales
y sus **relaciones.**



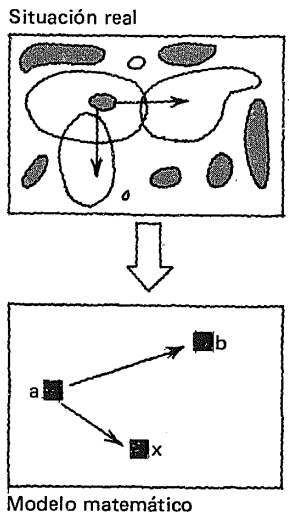
5

Los **elementos**
del **modelo**
guardarán entre sí
relaciones análogas a
las existentes entre
Los **elementos esenciales**
identificados
en la **situación real.**



6

La transformación de
la situación real
en un
modelo matemático
supone un proceso de
abstracción
(eliminación de lo no esencial).



7

Situación real

Una operación importante en el proceso de construcción de un **modelo** consiste en expresar el problema en forma de **enunciado escrito.**

Enunciado escrito de la situación real

8

En los **problemas** que resolveremos **en este módulo,** con fines de **entrenamiento** tomaremos como **punto de partida** el

Enunciado escrito de una supuesta situación real.

9

En
los cuadros siguientes
encontraremos

algunas ideas

que
nos servirán de

guía

en el proceso
de

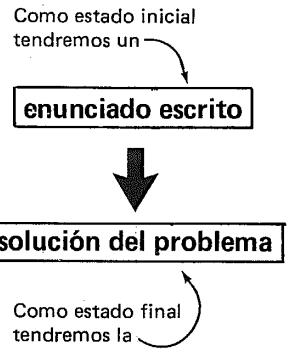
resolución de problemas

a partir de un

enunciado escrito dado.

10

Podemos considerar la tarea
como
un **proceso de transformación:**
de
un **estado inicial** dado
a
un **estado final** deseado,
pasando por una serie
de **estados intermedios.**



11

Consideraremos **4 etapas** en este proceso:

1. Comprensión de la situación
2. Construcción del modelo matemático
3. Resolución del modelo matemático
4. Verificación de la solución obtenida

12

Analizaremos brevemente
cada una
de las etapas consideradas
para el proceso de
transformación
de un enunciado escrito
en la
solución del problema.

13

1. Comprensión de la situación

Podemos lograr la

comprensión de la situación

a través de:

- lectura cuidadosa del enunciado
- trazo de esquemas

14

1. Comprensión de la situación

Lectura cuidadosa del enunciado

Identificaremos tres tipos de elementos:

- incógnitas
- datos
- relaciones entre datos e incógnitas

15

1. Comprensión de la situación

Lectura cuidadosa del enunciado

Preguntas que pueden sernos útiles en esta etapa:

¿Conocemos el **significado** de todos y cada uno de los **términos** del enunciado?

No → Buscamos entonces información adicional:

- consultamos diccionarios, enciclopedias, textos, manuales, etc.
- consultamos a otras personas, etc.

Sí → Seguimos adelante

16

1. Comprensión de la situación

Lectura cuidadosa del enunciado

¿Qué buscamos?

o bien

¿Cuál es la **incógnita** o cuáles las **incógnitas?**

17

1. Comprensión de la situación

Lectura cuidadosa del enunciado

¿De qué disponemos?

o bien

¿Cuáles son los **datos**?

y

¿Cuáles son las **relaciones** entre los datos y las incógnitas?

18

1. Comprensión de la situación

Lectura cuidadosa del enunciado

¿Hay **información no esencial?**

Sí → Procedemos a separarla.

No → Seguimos adelante.

19

1. Comprensión de la situación

Lectura cuidadosa del enunciado

¿Hay **información contradictoria?**

Sí { ¿Podemos eliminar la contradicción consultando a la persona que formuló el enunciado, etc.?

Sí → Procedemos a hacerlo.

No → Dejamos el problema por la paz.

No { Seguimos adelante

20

1. Comprensión de la situación

Lectura cuidadosa del enunciado

¿ Es **suficiente** la **información** dada?

No → **Buscamos información adicional:**

- Consultamos a la persona que formuló el enunciado, si esto es posible, o acudimos a otras fuentes de información.

Sí → Seguimos adelante.

21

1. Comprensión de la situación

Trazo de esquemas

Los esquemas, diagramas, bosquejos, croquis, gráficas, etc., son, por lo general, auxiliares valiosos para la comprensión del problema.

22

1. Comprensión de la situación

Al final de esta etapa,
si hemos logrado la completa comprensión del problema,
tendremos la **información** del enunciado **organizada** en una forma similar a ésta:

DATOS:	RELACIONES:	INCÓGNITA(S):

23

1. Comprensión de la situación

En este punto conviene preguntarnos:

¿Podemos **estimar** aunque sea en forma aproximada, la solución?

¿"De qué orden" deberán ser los resultados?

¿Podemos calcular mentalmente los resultados?

24

En este momento tenemos:

Estado inicial: Enunciado

1. **Comprensión**

Estado intermedio 1: Información organizada del enunciado

D	I	R

datos
incógnitas
relaciones entre datos e incógnitas

25

2. Construcción del modelo matemático

En los problemas que aquí resolveremos, el

modelo

consistirá de

una o más expresiones matemáticas

de alguno de los siguientes tipos

26

2. Construcción del modelo matemático

- ecuación de primer grado con una incógnita
- ecuación de segundo grado con una incógnita
- ecuación con radicales
- ecuación exponencial
- ecuación logarítmica
- desigualdad de primer grado con una incógnita

Continúa en el cuadro siguiente

2. Construcción del modelo matemático

- desigualdad de segundo grado con una incógnita
- sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas
- sistema de tres o más ecuaciones de primer grado con tres o más incógnitas
- sistema de dos o más desigualdades de primer grado con una incógnita
- sistema de dos o más desigualdades de primer grado con dos incógnitas

27

2. Construcción del modelo matemático

En algunas ocasiones,
la tarea consiste
en la simple

traducción del enunciado

al lenguaje

matemático.

28

2. Construcción del modelo matemático

En problemas especializados
—de física, química, economía, etc.—

se requiere que tengamos suficientes

conocimientos de la materia

y/o que dispongamos de los
medios adecuados de

consulta.

29

2. Construcción del modelo matemático

En todos los casos,
se requiere que

seleccionemos símbolos
para las incógnitas

y que establezcamos
en forma precisa
su significado.

30

2. Construcción del modelo matemático

A veces se requiere la

selección de símbolos para
los datos,

lográndose así,
un grado mayor de generalidad
en la solución.

31

Hasta aquí tenemos:

Estado inicial:

Enunciado

1. **Comprensión**

Estado intermedio 1:

D	R	I

2. **Construcción**

Estado intermedio 2:

Modelo

32

3. Resolución del modelo matemático

Durante esta etapa
efectuamos

transformaciones sucesivas en el modelo,

para determinar el
valor numérico de las incógnitas.

33

3. Resolución del modelo matemáico

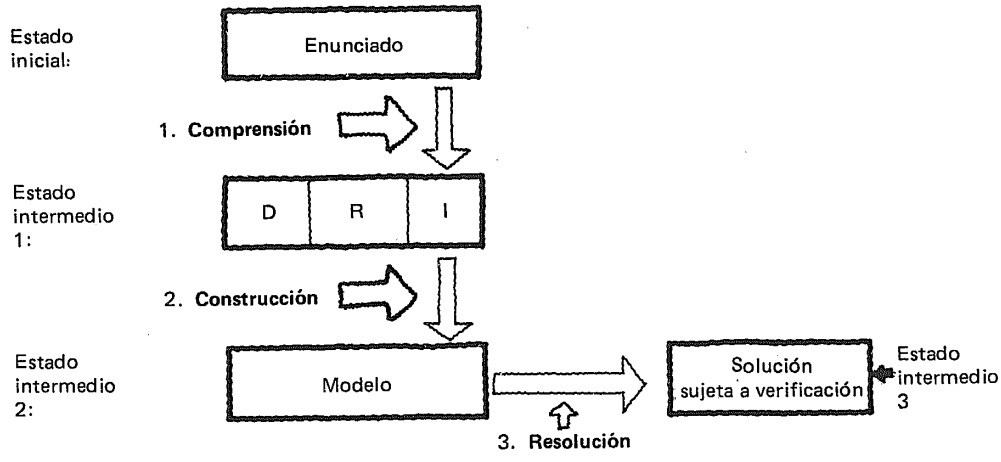
Al final de esta etapa
tendremos una

solución del problema

sujeta a verificación.

34

Tenemos, ahora:



35

4. Verificación de la solución obtenida

Los resultados obtenidos:

- ¿son **razonables?**
- ¿coinciden con los resultados **previamente estimados?**
- ¿están dentro del **rango** esperado?

36

4. Verificación de la solución obtenida

Regresamos al

enunciado

y vemos si la

solución obtenida satisface

todos y cada uno de los requerimientos allí establecidos.

37

4. Verificación de la solución obtenida

Si la solución encontrada

satisface

los requerimientos dados en el enunciado, habremos obtenido

la solución

verificada

del problema.

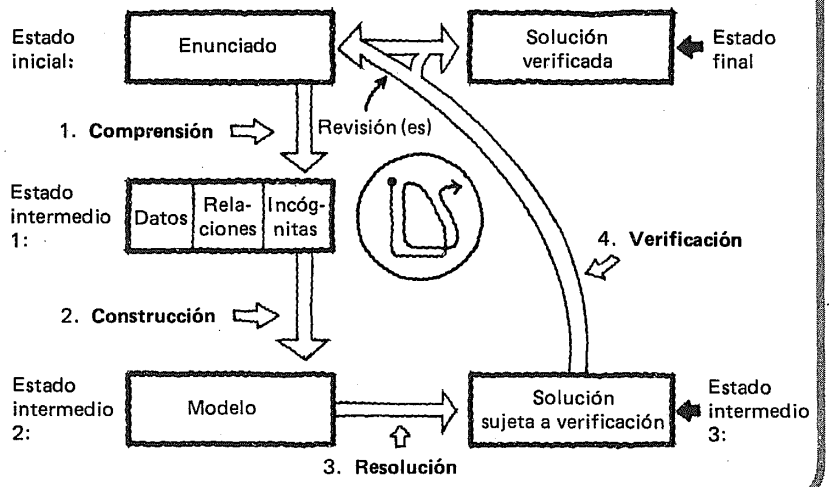
38

4. Verificación de la solución obtenida

Si la solución encontrada **no satisface** los requerimientos dados en el enunciado, debemos **revisar** cada una de las etapas del proceso hasta localizar y corregir los posibles **errores.**

39

Procedimiento completo:



2.12.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *describir* auxiliándose de un esquema previamente elaborado, el procedimiento para resolver un problema dado, a partir de su enunciado escrito.

12.2

Problemas que conducen a ecuaciones de primer grado con una incógnita, como modelo matemático

40

Léase cuidadosamente este enunciado.

Estado inicial:

Joaquín Rodríguez deja una herencia de 165 000 pesos para ser repartidos entre sus tres hijos: José Luis, de 17 años. Enrique, de 15, y Alberto, de 14; y sus dos hijas: María, de 20 y Consuelo, de 12. Ordena que cada hija reciba 20 000 pesos más que cada hijo.

Calcular la cantidad de dinero que le corresponde a cada hijo y a cada hija.

41

1. Comprensión del problema

¿Conocemos el

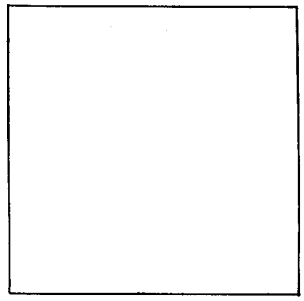
significado

de todos y cada uno
de los términos
del enunciado?

Respuesta abierta

42

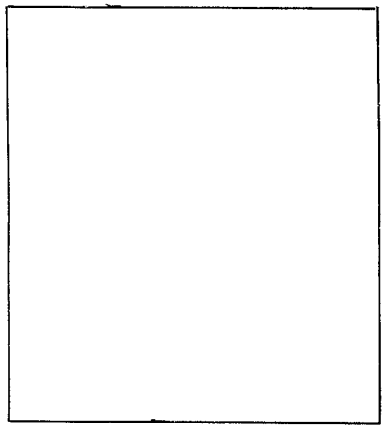
¿Cuáles son las incógnitas?



Calcular la cantidad de dinero que le corresponde a cada hijo y a cada hija.

43

¿Cuáles son los datos?

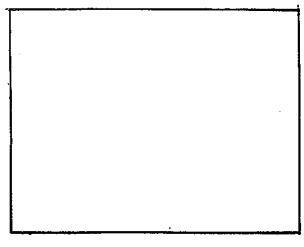


una herencia de 165 000

entre sus tres hijos: José Luis, de 17 años; Enrique, de 15 y Alberto, de 14; y sus dos hijas: María, de 20 y Consuelo, de 12. Ordena que cada hija reciba 20 000 pesos más

44

¿Cuáles son las relaciones entre los datos y las incógnitas?



Ordena que cada hija reciba 20 000 pesos más que cada hijo.

45

¿Hay **información no esencial?**
¿Sobran datos?

Sí → Señalar y eliminar*

No

* Tachar en el enunciado la información no esencial.

~~Joaquín Rodríguez deja una herencia de~~ 165 000 pesos para ser repartidos entre ~~sus~~ tres hijos: ~~José Luis, de 17 años, Enrique de 15, y Alberto de 14;~~ y ~~sus~~ dos hijas: ~~María, de 20, y Consuelo, de 12.~~ ~~Ordena~~ que cada hija reciba 20 000 pesos más que cada hijo.
Calcular la cantidad de dinero que le corresponde a cada hijo y a cada hija.

46

¿Hay **información contradictoria o ambigua?**

Sí → Señalarla

No

No

47

¿Es **suficiente la información** dada?

Sí

No → ¿Cuál es la información faltante?

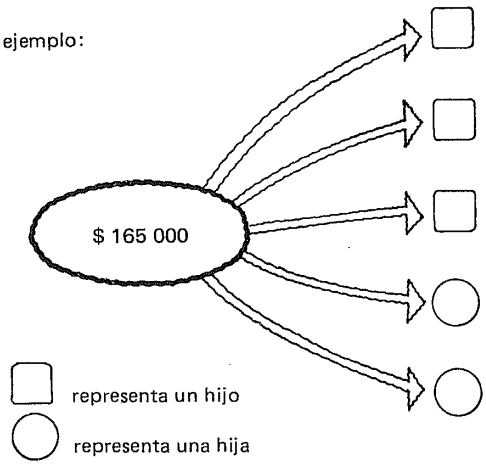
Sí

48

Hagamos un croquis que nos ayude a comprender el enunciado.

Respuesta en el cuadro siguiente

Por ejemplo:



49

Completar la información organizada del enunciado.

Datos:	Relaciones:	Incógnitas:

Respuesta en el cuadro siguiente

Información organizada del enunciado

Estado intermedio 1

Datos:	**Relaciones:**	**Incógnitas:**
Monto de la herencia: $ 165 000 Número de hijos: 3 Número de hijas: 2	cada hija debe recibir $ 20 000 más que cada hijo.	Cantidad correspondiente a cada hijo: _____ Cantidad correspondiente a cada hija: _____

50

¿Podemos **estimar** el valor numérico de las incógnitas?

¿Podemos **calcular mentalmente** los resultados?

Veamos:

- Cantidad estimada correspondiente a cada hijo: _____
- Cantidad estimada correspondiente a cada hija: _____

Respuesta abierta

51

Datos:

Monto herencia: $ 165 000
Número de hijos: 3
Número de hijas: 2

Relaciones:

Cada hija debe recibir $ 20 000 más que cada hijo.

Incógnitas:

Cantidad correspondiente a cada hijo: _____

Cantidad correspondiente a cada hija: _____

2. Construcción del modelo

En este punto, podemos optar por:

seleccionar

un símbolo para cada una de

las incógnitas

o bien por expresar las dos incógnitas utilizando

un solo símbolo.

52

Datos:

Monto herencia: $ 165 000
Número de hijos: 3
Número de hijas: 2

Relaciones:

Cada hija debe recibir
$ 20 000 más que cada hijo.

Incógnitas:

Cantidad correspondiente
a cada hijo: [_____]

Cantidad correspondiente
a cada hija: [_____]

Decidimos utilizar
un solo símbolo:

x = cantidad correspondiente a cada hijo (en pesos).

53

Datos:

Monto herencia: $ 165 000
Número de hijos: 3
Número de hijas: 2

Relaciones:

Cada hija debe recibir
$ 20 000 más que cada hijo.

Incógnitas:

Cantidad correspondiente
a cada hijo: [_____]

Cantidad correspondiente
a cada hija: [_____]

Entonces:

Cada hijo recibirá x pesos.

Cada hija recibirá [_____] pesos.

Respuesta
en el
cuadro siguiente

Datos:

Monto herencia: $ 165 000
Número de hijos: 3
Número de hijas: 2

Relaciones:

Cada hija debe recibir
$ 20 000 más que cada hijo.

Incógnitas:

Cantidad correspondiente
a cada hijo: [_____]

Cantidad correspondiente
a cada hija: [_____]

Cada hijo recibirá x pesos.

Cada hija recibirá x + 20 000 pesos

54

Datos:

Monto herencia: $ 165 000
Número de hijos: 3
Número de hijas: 2

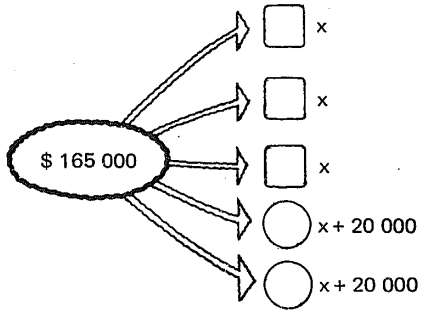
Relaciones:

Cada hija debe recibir
$ 20 000 más que cada hijo.

Incógnitas:

Cantidad correspondiente
a cada hijo: [ ]

Cantidad correspondiente
a cada hija: [ ]



Estamos en condiciones de escribir
el **modelo:**

[ ]

Respuesta
en el
cuadro siguiente

Datos:

Monto herencia: $ 165 000
Número de hijos: 3
Número de hijas: 2

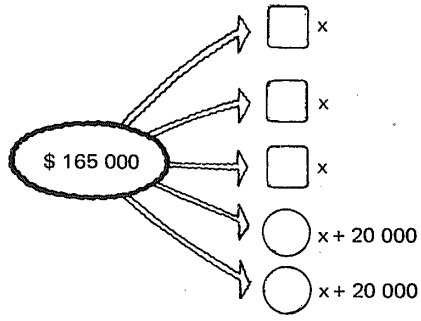
Relaciones:

Cada hija debe recibir
$ 20 000 más que cada hijo.

Incógnitas:

Cantidad correspondiente
a cada hijo: [ ]

Cantidad correspondiente
a cada hija: [ ]



El modelo:

$3x + 2(x + 20\,000) = 165\,000$

o alguna expresión equivalente.

55

Datos:

Monto herencia: $ 165 000
Número de hijos: 3
Número de hijas: 2

Relaciones:

Cada hija debe recibir
$ 20 000 más que cada hijo

Incógnitas:

Cantidad correspondiente
a cada hijo: [ ]

Cantidad correspondiente
a cada hija: [ ]

Estado intermedio 2

Modelo matemático:

$3x + 2\,(x + 20\,000) = 165\,000$

Identificamos este modelo
como una

[ ]

Respuesta
en el
cuadro siguiente

Datos:

Monto herencia: $ 165 000
Número de hijos: 3
Número de hijas: 2

Relaciones:

Cada hija debe recibir
$ 20 000 más que cada hijo.

Incógnitas:

Cantidad correspondiente
a cada hijo: ____

Cantidad correspondiente
a cada hija: ____

ecuación de primer grado con una incógnita

56

Datos:

Monto herencia: $ 165 000
Número de hijos: 3
Número de hijas: 2

Relaciones:

Cada hija debe recibir
$ 20 000 más que cada hijo.

Incógnitas:

Cantidad correspondiente
a cada hijo: ____

Cantidad correspondiente
a cada hija: ____

3. Resolución del modelo

$3x + 2(x + 20\,000) = 165\,000$

Transformaciones:

x = ____

Respuesta
en el
cuadro siguiente

Datos:

Monto herencia: $ 165 000
Número de hijos: 3
Número de hijas: 2

Relaciones:

Cada hija debe recibir
$ 20 000 más que cada hijo.

Incógnitas:

Cantidad correspondiente
a cada hijo: ____

Cantidad correspondiente
a cada hija: ____

$3x + 2(x + 20\,000) = 165\,000$

$3x + 2x + 40\,000 = 165\,000$

$3x + 2x = 165\,000 - 40\,000$

$5x = 125\,000$

$x = 125\,000/5$

$x = 25\,000$

57

Datos:

Monto herencia: $ 165 000
Número de hijos: 3
Número de hijas: 2

Relaciones:

Cada hija debe recibir
$ 20 000 más que cada hijo.

Incógnitas:

Cantidad correspondiente
a cada hijo: [ ]

Cantidad correspondiente
a cada hija: [ ]

$$3x + 2(x + 20\,000) = 165\,000$$

$$x = 25\,000$$

Cada hijo recibe [ ]

Cada hija recibe [ ]

Respuesta
en el
cuadro siguiente

Datos:

Monto herencia: $ 165 000
Número de hijos: 3
Número de hijas: 2

Relaciones:

Cada hija debe recibir
$ 20 000 más que cada hijo.

Incógnitas:

Cantidad correspondiente
a cada hijo: [ ]

Cantidad correspondiente
a cada hija: [ ]

Solución sujeta a verificación:

Estado intermedio 3

Cada hijo recibe: $x = 25\,000$

Cada hija recibe:

$$x + 20\,000 = 45\,000$$

58

Regresamos
al enunciado
para

verificar

la solución
obtenida.

59

Joaquín Rodríguez deja una herencia de 165 000 pesos para ser repartidos entre sus tres hijos: José Luis, de 17 años; Enrique, de 15, y Alberto, de 14; y sus dos hijas: María, de 20 y Consuelo, de 12. Ordena que cada hija reciba 20 000 pesos más que cada hijo.

Calcular la cantidad de dinero que le corresponde a cada hijo y a cada hija.

60

Datos:

Monto herencia: $ 165 000
Número de hijos: 3
Número de hijas: 2

Relaciones:

Cada hija debe recibir
$ 20 000 más que cada hijo.

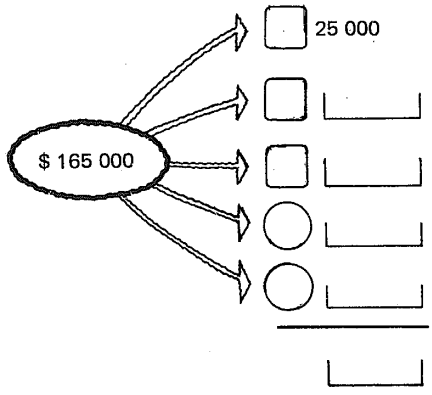
Incógnitas:

Cantidad correspondiente
a cada hijo: ____

Cantidad correspondiente
a cada hija: ____

4. Verificación de la solución obtenida

Completar:



Respuesta
en el
cuadro siguiente

Datos:

Monto herencia: $ 165 000
Número de hijos: 3
Número de hijas: 2

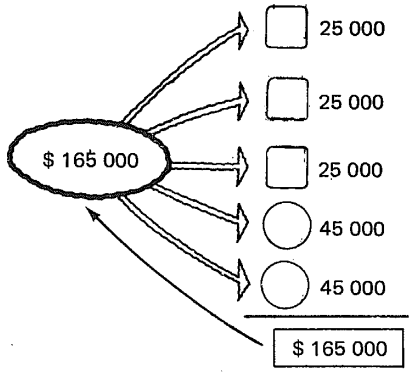
Relaciones:

Cada hija debe recibir
$ 20 000 más que cada hijo.

Incógnitas:

Cantidad correspondiente
a cada hijo: ____

Cantidad correspondiente
a cada hija: ____



Anotemos los resultados.

61

Datos:

Monto herencia: $ 165 000
Número de hijos: 3
Número de hijas: 2

Relaciones:

Cada hija debe recibir
$ 20 000 más que cada hijo.

Incógnitas despejadas:

Cantidad correspondiente
a cada hijo: $ 25 000

Cantidad correspondiente
a cada hija: $ 45 000

Estado final:

Solución verificada

62

Si hemos de resolver

muchos problemas análogos al resuelto,

tal vez deseemos construir un

modelo más general.

En tal caso,
seleccionamos

símbolos para los datos.

(Véase cuadro siguiente.)

63

Datos:

Monto herencia: $ 165 000 → C Capital a repartir
Número de hijos: 3 → h Número de hijos
Número de hijas: 2 → m Número de hijas

Relaciones:

Cada hija debe recibir
$ 20 000 más que cada hijo → e Cantidad adicional para las hijas

Incógnitas:

Cantidad correspondiente
a cada hijo: ____

Cantidad correspondiente
a cada hija: ____

64

Datos:

Monto herencia: **C**
Número de hijos: **h**
Número de hijas: **m**

Relaciones:

Cada hija debe recibir
e pesos más que cada hijo.

Incógnitas:

Cantidad correspondiente
a cada hijo: **x**

Cantidad correspondiente
a cada hija: **x + e**

Modelo:

Modelo anterior como referencia:

$3x + 2(x + 20\,000) = 165\,000$

Respuesta
en el
cuadro siguiente

Datos:

Monto herencia: **C**
Número de hijos: **h**
Número de hijas: **m**

Relaciones:

Cada hija debe recibir
e pesos más que cada hijo.

Incógnitas:

Cantidad correspondiente
a cada hijo: **x**

Cantidad correspondiente
a cada hija: **x + e**

Modelo:

$hx + m(x + e) = C$

65

Tal vez quisiéramos
establecer un

modelo aún más general
con una relación
no especificada (ϕ)

entre las cantidades
asignadas a cada hijo
y a cada hija.

66

Datos:

Monto herencia: **C**
Número de hijos: **h**
Número de hijas: **m**

Relación: ϕ

Incógnitas:

Cantidad correspondiente a cada hijo: **x**

Cantidad correspondiente a cada hija: [ ]

En estas condiciones:

si cada hijo recibe x pesos,

cada hija recibirá

y = [ ] pesos

Intentemos dar una expresión para y.

Respuesta en el cuadro siguiente

Datos:

Monto herencia: **C**
Número de hijos: **h**
Número de hijas: **m**

Relación: ϕ

Incógnitas:

Cantidad correspondiente a cada hijo: **x**

Cantidad correspondiente a cada hija: $y = \phi\ (x)$

Si

cada hijo recibe

x pesos,

cada hija recibirá

$y = \phi\ (x)$ pesos

67

Datos:

Monto herencia: **C**
Número de hijos: **h**
Número de hijas: **m**

Relación: ϕ

Incógnitas:

Cantidad correspondiente a cada hijo: **x**

Cantidad correspondiente a cada hija: $\phi\ (x)$

Nuestro modelo tendrá este aspecto:

[ ]

Modelo anterior como referencia

$hx + m\ (x + e) = C$

Respuesta en el cuadro siguiente

Datos:

Monto herencia: **C**
Número de hijos: **h**
Número de hijas: **m**

Relación: $y = \phi(x)$

Incógnitas:

Cantidad correspondiente a cada hijo: **x**

Cantidad correspondiente a cada hija: $\phi(x)$

$$hx + m \cdot \phi(x) = C$$

68

$$hx + m \cdot \phi(x) = C$$

En el problema inicial, el padre establece que:

cada hija reciba 20 000 pesos más que cada hijo,

por lo tanto:

$\phi(x) =$ [ ]

$x + 20\,000$

69

$$hx + m \cdot \phi(x) = C$$

Si el padre hubiera establecido que: cada hija recibiera

el doble

de lo recibido por cada hijo:

$\phi(x) =$ [ ]

$2x$

70

$$hx + m \cdot \phi(x) = C$$

Si el padre hubiera establecido que:
cada hija recibiera la

tercera parte

de lo correspondiente a cada hijo:

$\phi(x) =$ ⌊_____⌋

$\frac{x}{3}$

71

$$hx + m \cdot \phi(x) = C$$

Si la condición fuera:
entregar a cada hija

la misma cantidad

que a cada hijo:

$\phi(x) =$ ⌊_____⌋

x

72

$$hx + m \cdot \phi(x) = C$$

Si se requiriera:
dar a cada hija

la mitad

de la parte correspondiente a cada hijo,

más 10 000 pesos

$\phi(x) =$ ⌊_____⌋

$\frac{x}{2} + 10\,000$

73

$$hx + m \cdot \phi(x) = C$$

Si el requerimiento fuera:
dar a cada hija **la mitad de:**
la parte correspondiente
a cada hijo **incrementada**
en **15 000 pesos.**

$\phi(x) =$

$$\frac{x + 15\,000}{2}$$

2.12.2.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

74

En esta forma,
nuestros

modelos

pueden ir alejándose
más y más
de la

situación concreta

inicial para aplicarse
a más y más casos particulares.

2.12.2.2

Práctica adicional de
resolución de problemas
cuyo enunciado conduce a una

ecuación de primer grado
con una incógnita

como modelo matemático.

2.12.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *aplicar* el procedimiento estudiado de resolución de problemas, a enunciados escritos que conducen a ecuaciones de primer grado con una incógnita, como modelo matemático.

12.3

Problemas que conducen a ecuaciones de segundo grado con una incógnita, como modelo matemático

75

Léase cuidadosamente este enunciado.

Estado inicial

Un estudiante quiere saber cuántos cuadernos necesita comprar y a qué precio, para que, al conservar 3 cuadernos para su uso personal y al vender los restantes con una utilidad de 5 pesos por pieza, recupere los 500 pesos invertidos.

76

1. Comprensión del problema.

¿Conocemos el

significado

de todos los términos empleados?

¿Nos es

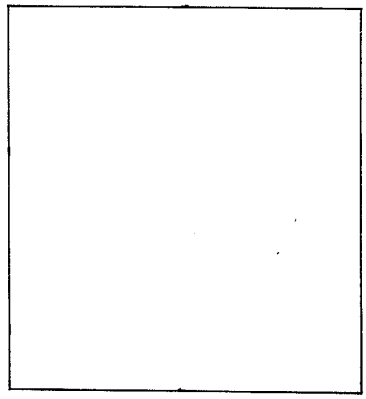
inteligible

el enunciado?

Respuesta abierta

77

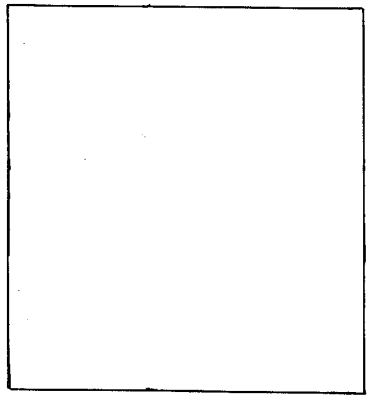
¿Cuáles son las **incógnitas?**



Un estudiante quiere saber **cuántos cuadernos necesita comprar y a qué precio** para que, al conservar 3 cuadernos para su uso personal y al vender los restantes con una utilidad de 5 pesos por pieza, recupere los 500 pesos invertidos.

78

¿Cuáles son los **datos?**

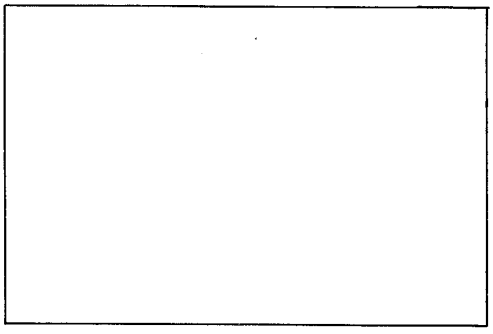


Un estudiante quiere saber cuántos cuadernos necesita comprar y a qué precio, para que, **al conservar 3** cuadernos para su uso personal y al **vender los restantes con una utilidad de 5 pesos por pieza** recupere los **500 pesos invertidos.**

79

¿Qué **relaciones** podemos identificar entre los datos y las incógnitas?

Intentar describirlas.



La cantidad recuperada debe ser igual a la cantidad invertida.

El precio de venta debe ser igual al precio de compra incrementado, en 5 pesos.

El número de cuadernos vendidos debe ser igual al número de cuadernos comprados disminuido en 3.

80

Completar la información organizada del enunciado:

Datos:	Relaciones:	Incógnitas:

Véase el cuadro siguiente.

81

Información organizada del enunciado.

Estado intermedio 1

Datos:	Relaciones:	Incógnitas:
Número de cuadernos conservados para uso personal 3 Utilidad por cuaderno vendido $ 5 Cantidad invertida en pesos $ 500	Cantidad recuperada igual a cantidad invertida. Precio de venta igual a precio de compra incrementado en 5 pesos. Número de cuadernos vendidos igual al número de cuadernos comprados disminuido en 3.	Número de cuadernos comprados: ⌊___⌋ Precio de compra ⌊___⌋

82

¿Podemos **estimar** la solución?

¿Podemos **calcular mentalmente** los resultados?

Veamos:

Número estimado de cuadernos comprados: ⌊_____⌋

Precio de compra estimado: ⌊_____⌋

Respuesta abierta

83

Datos:

Cantidad invertida: $ 500

Relaciones:

Cantidad recuperada = Cantidad invertida

Precio venta = Precio compra incrementado en 5 pesos

Número cuadernos vendidos = Número cuadernos comprados disminuido en 3.

Incógnitas:

Número de cuadernos comprados

Precio compra → [ ] [ ]

2. Construcción del modelo

Procedamos ahora a construir el

modelo matemático.

84

Datos:

Cantidad invertida: $ 500

Relaciones:

Cantidad recuperada = Cantidad invertida

Precio venta = Precio compra incrementado en 5 pesos

Número cuadernos vendidos = Número cuadernos comprados disminuido en 3.

Incógnitas:

Número de cuadernos comprados

Precio compra → [ ] [ ]

Atención.

Si

x = número de cuadernos comprados

podemos expresar el

precio de compra

en la siguiente forma:

y = [ ]

Respuesta en el cuadro siguiente

85

Datos:

Cantidad invertida: $ 500

Relaciones:

Cantidad recuperada = Cantidad invertida

Precio venta = Precio compra incrementado en 5 pesos

Número cuadernos vendidos = Número cuadernos comprados disminuido en 3.

Incógnitas:

Número de cuadernos comprados

Precio compra → [ ] [ ]

x = número de cuadernos comprados

$y = \frac{500}{x}$ = precio de compra

Número de cuadernos vendidos:

[ ]

Respuesta en el cuadro siguiente

86

Datos:

Cantidad invertida: $ 500

Relaciones:

Cantidad recuperada = Cantidad invertida

Precio venta = Precio compra incrementado en 5 pesos

Número cuadernos vendidos = Número cuadernos comprados disminuido en 3.

Incógnitas:

Número de cuadernos comprados

Precio compra → [ ] [↓]

x = número de cuadernos comprados

$y = \frac{500}{x}$ = precio de compra

$x - 3$ = número de cuadernos vendidos

[ ] = precio de venta

Respuesta en el cuadro siguiente

87

Datos:

Cantidad invertida: $ 500

Relaciones:

Cantidad recuperada = Cantidad invertida

Precio venta = Precio compra incrementado en 5 pesos

Número cuadernos vendidos = Número cuadernos comprados disminuido en 3.

Incógnitas:

Número de cuadernos comprados

Precio compra → [ ] [↓]

Número de cuadernos comprados: x

Precio de compra: $\frac{500}{x}$

Número de cuadernos vendidos $x - 3$

Precio de venta: $\frac{500}{x} + 5$

El modelo:

[ ]

Respuesta en el cuadro siguiente

Datos:

Cantidad invertida: $ 500

Relaciones:

Cantidad recuperada = Cantidad invertida

Precio venta = Precio compra incrementado en 5 pesos

Número de cuadernos vendidos = Número cuadernos comprados disminuido en 3.

Incógnitas:

Número de cuadernos comprados

Precio compra → [ ] [↓]

Por ejemplo:

Cantidad recuperada: $(x - 3)\left(\frac{500}{x} + 5\right)$ = Cantidad invertida: 500

Número de cuadernos vendidos: $x - 3$

precio de venta: $\frac{500}{x} + 5$

88

Datos:

Cantidad invertida: $ 500

Relaciones:

Cantidad recuperada = Cantidad invertida

Precio venta = Precio compra incrementado en 5 pesos

Número cuadernos vendidos = Número cuadernos comprados disminuido en 3.

Incógnitas:

Número de cuadernos comprados

Precio compra → [ ] [ ]

$$(x - 3)\left(\frac{500}{x} + 5\right) = 500$$

Expresión equivalente simplificada:

[ ]

Respuesta en el cuadro siguiente

Datos:

Cantidad invertida: $ 500

Relaciones:

Cantidad recuperada = Cantidad invertida

Precio venta = Precio compra incrementado en 5 pesos

Número cuadernos vendidos = Número cuadernos comprados disminuido en 3.

Incógnitas:

Número de cuadernos comprados

Precio compra → [ ] [ ]

$$(x - 3)\left(\frac{500}{x} + 5\right) = 500$$

$$\frac{(x - 3)(500 + 5x)}{x} = 500$$

$$(x - 3)(500 + 5x) = 500x$$

$$500x + 5x^2 - 1\,500 - 15x = 500x$$

$$5x^2 - 1\,500 - 15x = 0$$

$$5x^2 - 15x - 1\,500 = 0$$

$$\mathbf{x^2 - 3x - 300 = 0}$$

89

Datos:

Cantidad invertida: $ 500

Relaciones:

Cantidad recuperada = Cantidad invertida

Precio venta = Precio compra incrementado en 5 pesos

Número cuadernos vendidos = Número cuadernos comprados disminuido en 3.

Incógnitas:

Número de cuadernos comprados

Precio compra → [ ] [ ]

$$x^2 - 3x - 300 = 0$$

$x \in$ [ ]

Dominio

Respuesta en el cuadro siguiente

90

Datos:

Cantidad invertida: $ 500

Relaciones:

Cantidad recuperada = Cantidad invertida

Precio venta = Precio compra incrementado en 5 pesos

Número cuadernos vendidos = Número cuadernos comprados disminuido en 3.

Incógnitas:

Número de cuadernos comprados

Precio compra → [ ] [↓]

$x^2 - 3x - 300 = 0$

$x \in \mathbb{N}$

Identificamos este modelo como una:

[ ]

Respuesta en el cuadro siguiente

Datos:

Cantidad invertida: $ 500

Relaciones:

Cantidad recuperada = Cantidad invertida

Precio venta = Precio compra incrementado en 5 pesos

Número cuadernos vendidos = Número cuadernos comprados disminuido en 3.

Incógnitas:

Número de cuadernos comprados

Precio compra → [ ] [↓]

ecuación de segundo grado con una incógnita

91

Datos:

Cantidad invertida: $ 500

Relaciones:

Cantidad recuperada = Cantidad invertida

Precio venta = Precio compra incrementado en 5 pesos

Número cuadernos vendidos = Número cuadernos comprados disminuido en 3.

Incógnitas:

Número de cuadernos comprados

Precio compra → [ ] [↓]

Estado intermedio 2:

$x^2 - 3x - 300 = 0$

$x \in \mathbb{N}$

92

Datos:

Cantidad invertida: $ 500

Relaciones:

Cantidad recuperada = Cantidad invertida

Precio venta = Precio compra incrementado en 5 pesos

Número cuadernos vendidos = Número cuadernos comprados disminuido en 3.

Incógnitas:

Número de cuadernos comprados

Precio compra → [ ] [ ]

3. Resolución del modelo:

$x^2 - 3x - 300 = 0$
$x \in \mathbb{N}$

$x =$ [ ]

Respuesta en el cuadro siguiente

Datos:

Cantidad invertida: $ 500

Relaciones:

Cantidad recuperada = Cantidad invertida

Precio venta = Precio compra incrementado en 5 pesos

Número cuadernos vendidos = Número cuadernos comprados disminuido en 3.

Incógnitas:

Número de cuadernos comprados

Precio compra → [ ] [ ]

$x^2 - 3x - 300 = 0$
$x \in \mathbb{N}$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 1200}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{1209}}{2}$$

$$x \doteq \frac{3 \pm 34.77}{2}$$

$x_1 \doteq 18.885$

$x_2 \doteq -15.885$

93

Atención.

4. Verificación de la solución obtenida

Encontramos que la ecuación

$$x^2 - 3x - 300 = 0$$

no tiene solución en $\mathbb{N}$

pero, uno de los satisfactores

$$x_1 \doteq 18.885$$
$$x_1 \in \mathbb{R}^+$$

puede servir muy bien a nuestro estudiante, desde el punto de vista práctico.

94

Datos:

Cantidad invertida: $ 500

Relaciones:

Cantidad recuperada = Cantidad invertida

Precio venta = Precio compra incrementado en 5 pesos

Número cuadernos vendidos = Número cuadernos comprados disminuido en 3.

Incógnitas:

Número de cuadernos comprados

Precio compra → [ ] [ ]

Veamos:

Si compra 19 cuadernos a $ 26.32

la cantidad invertida es $ 500.08.

Vende 16 (conserva 3 para su uso personal)

a un precio de $ 31.32 (26.32 + 5)

y obtiene de la venta →

16 × 31.32 = $ 501.12

(¡La operación le deja, además de los tres cuadernos gratis, una utilidad adicional de $ 1.04!)

95

Datos:

Cantidad invertida: $ 500

Relaciones:

Cantidad recuperada = Cantidad invertida

Precio venta = Precio compra incrementado en 5 pesos

Número cuadernos vendidos = Número cuadernos comprados disminuido en 3.

Incógnitas:

Número de cuadernos comprados

Precio compra → 26.32 19

Estado final:

← **solución verficada**

2.12.3.1

Práctica adicional
de resolución de problemas,
cuyo enunciado conduce
a una **ecuación de segundo grado con una incógnita,**
como modelo matemático.

2.12.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *aplicar* el procedimiento estudiado de resolución de problemas, a enunciados escritos que conducen a ecuaciones de segundo grado con una incógnita, como modelo matemático.

12.4

Problemas que conducen a sistemas de dos o más ecuaciones de primer grado, como modelo matemático

96

Léase cuidadosamente este enunciado.

Estado inicial

Un comerciante tiene dos clases de productos:

- un producto A, que vende a $ 35 el kilo

y

- un producto B, que vende a $ 18 el kilo

Los clientes no compran el producto A, por caro, ni el producto B, por considerarlo de baja calidad a causa de su bajo precio.

Por lo tanto, se le ocurre hacer una mezcla de ambos que pueda vender a $ 27 el kilo, y nos pregunta qué cantidades debe tomar, por kilo, de cada producto.

97

1. Comprensión del problema

¿Cuáles son las **incógnitas**?

Respuesta en el cuadro siguiente

Un comerciante tiene dos clases de productos:

- un producto A, que vende a $ 35 el kilo

y

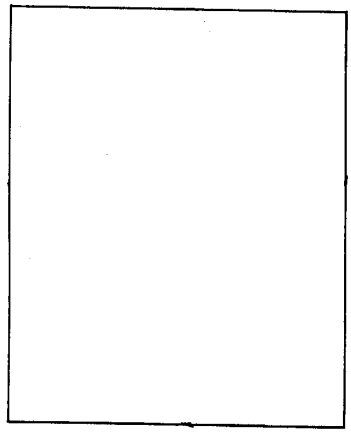
- un producto B, que vende a $ 18 el kilo

Los clientes no compran el producto A, por caro, ni el producto B, por considerarlo de baja calidad a causa de su bajo precio.

Por lo tanto, se le ocurre hacer una mezcla de ambos que puede vender a $ 27 el kilo, y nos pregunta qué **cantidades** debe tomar **por kilo, de cada producto.**

98

¿Cuáles son los **datos?**



Respuesta
en el
cuadro siguiente

Un comerciante tiene dos clases de productos:

- un **producto A** , que vende **a $ 35 el kilo**

y

- un **producto B** , que vende **a $ 18 el kilo**

Los clientes no compran el producto A, por caro ni el producto B, por considerarlo de baja calidad a causa de su bajo precio.

Por lo tanto, se le ocurre hacer una **mezcla de ambos** que pueda vender **a $ 27 el kilo,** y nos pregunta qué cantidades debe tomar, por kilo, de cada producto.

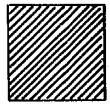
99

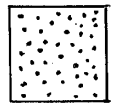
¿Qué **relaciones** entre datos e incógnitas podríamos señalar?

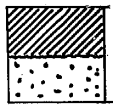
Intentar describirlas.

Respuesta en el cuadro siguiente

Veámoslo en forma esquemática

 ← 1 kilogramo de producto A

 ← 1 kilogramo de producto B

 ← Porción tomada de producto A
← Porción tomada de producto B
} 1 kilogramo del producto mezcla

100

Podemos enunciar esta relación así:

"La suma de las porciones tomadas de cada uno de los productos debe ser igual a [_____]"

1 kilogramo

101

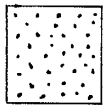
Podemos esquematizar el problema en esta forma:

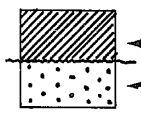
Porción tomada en kg del producto A para un kg de producto mezcla.	+	Porción tomada en kg del Producto B para un kg de producto mezcla.	=	1 kg del producto mezcla.

102

Además:

← Precio de un kilogramo de producto A: $ 35

 ← Precio de un kilogramo de producto B: $ 18


← Precio de la porción tomada del producto A
← Precio de la porción tomada del producto B

} Precio de un kilogramo del producto mezcla: $ 27

103

El cuadro anterior nos sugiere la relación que podemos representar esquemáticamente así:

Respuesta en el cuadro siguiente

Precio de la porción tomada del producto A.	+	Precio de la porción tomada del producto B.	=	$ 27

104

Ahora señalamos y eliminamos la **información no esencial** del enunciado del problema citado al principio de esta sección.

105

~~Un comerciante tiene dos clases de productos:~~

- un producto A ~~que vende~~ a $ 35 el kilo

~~Y~~

- un producto B ~~que vende~~ a $ 18 el kilo

~~Los clientes no compran el producto A, por caro, ni el producto B, por considerarlo de baja calidad a causa de su bajo precio.~~

~~Por lo tanto, se le ocurre~~ ~~hacer~~ una mezcla de ambos ~~que pueda vender~~ a $ 27 el kilo, ~~y nos pregunta~~ qué cantidades ~~debe~~ tomar, por kilo, de cada producto.

106

Completar la información organizada del enunciado:

Datos:	Relaciones:	Incógnitas:

Respuesta
en el
cuadro siguiente

Información organizada del enunciado:

Estado intermedio 1

Datos:	Relaciones:	Incógnitas:
Precio por kg del producto A: $ 35 Precio por kg del producto B: $ 18 Precio por kg del producto mezcla: $ 27	La suma de los pesos tomados de cada uno de los productos = 1 kg La suma de los precios de las porciones tomadas de cada uno de los productos = $ 27	Cantidad en kg producto A: ⌊___⌋ Cantidad en kg producto B: ⌊___⌋ para hacer un kg de producto mezcla.

107

¿Podemos **estimar** o **calcular mentalmente** la solución?

Intentémoslo:

- Cantidad requerida del producto A, en kg, por kg de producto mezcla:
  ⌊_____⌋
- Cantidad requerida del producto B, en kg, por kg de producto mezcla:
  ⌊_____⌋

Respuesta
abierta

108

Datos:

Precio producto A: $ 35
Precio producto B: $ 18
Precio mezcla: $ 27

Relaciones:

Cantidad de producto A +
Cantidad de producto B = 1 kg

Precio porción producto A
+ Precio porción producto B
= $ 27

Incógnitas:

Cantidad producto A: ____
Cantidad producto B: ____

2. Construcción del modelo.

Optamos
por
seleccionar
un

símbolo

que represente
a
cada una
de
las incógnitas.

109

Datos:

Precio producto A: $ 35
Precio producto B: $ 18
Precio mezcla: $ 27

Relaciones:

Cantidad de producto A +
Cantidad de producto B = 1 kg

Precio porción producto A
+ Precio porción producto B
= $ 27

Incógnitas:

Cantidad producto A: ____
Cantidad producto B: ____

x = ____

y = ____

Respuesta
en el
cuadro siguiente

Datos:

Precio producto A: $ 35
Precio producto B: $ 18
Precio mezcla: $ 27

Relaciones:

Cantidad de producto A +
Cantidad de producto B = 1 kg

Precio porción producto A
+ Precio porción producto B
= $ 27

Incógnitas:

Cantidad producto A: ____
Cantidad producto B: ____

x = cantidad requerida, en kg
por kg, de producto A

y = cantidad requerida, en kg
por kg, de producto B

110

Datos:

Precio producto A: $ 35
Precio producto B: $ 18
Precio mezcla: $ 27

Relaciones:

Cantidad de producto A +
Cantidad de producto B = 1 kg

Precio porción producto A
+ Precio porción producto B
= $ 27

Incógnitas:

Cantidad producto A: x
Cantidad producto B: y

Traduzcamos el enunciado de la relación 1 al lenguaje matemático:

[ ]

Respuesta en el cuadro siguiente

111

Datos:

Precio producto A: $ 35
Precio producto B: $ 18
Precio mezcla: $ 27

Relaciones:

Cantidad de producto A +
Cantidad de producto B = 1 kg

Precio porción producto A
+ Precio porción producto B
= $ 27

Incógnitas:

Cantidad producto A: x
Cantidad producto B: y

$x + y = 1$

Hagamos lo mismo con el enunciado de la relación 2:

[ ]

Respuesta en el cuadro siguiente

112

Datos:

Precio producto A: $ 35
Precio producto B: $ 18
Precio mezcla: $ 27

Relaciones:

Cantidad de producto A +
Cantidad de producto B = 1 kg

Precio porción producto A
+ Precio porción producto B
= $ 27

Incógnitas:

Cantidad producto A: x
Cantidad producto B: y

$35x + 18y = 27$

$x,y \in$ [ ]

↑
Dominio

Respuesta en el cuadro siguiente

113

Datos:

Precio producto A: $ 35
Precio producto B: $ 18
Precio mezcla: $ 27

Relaciones:

Cantidad de producto A + Cantidad de producto B = 1

Precio porción producto A + Precio porción producto B = 27

Incógnitas:

Cantidad producto A: x
Cantidad producto B: y

Estado intermedio 2

Modelo

$$x + y = 1$$

$$35x + 18y = 27$$

$$x,y \in \mathbb{R}^+$$

Identificamos este modelo como:

[ ]

Respuesta en el cuadro siguiente

Datos:

Precio producto A: $ 35
Precio producto B: $ 18
Precio mezcla: $ 27

Relaciones:

Cantidad de producto A + Cantidad de producto B = 1 kg

Precio porción producto A + Precio porción producto B = $ 27

Incógnitas:

Cantidad producto A: x
Cantidad producto B: y

un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

114

Datos:

Precio producto A: $ 35
Precio producto B: $ 18
Precio mezcla: $ 27

Relaciones:

Cantidad de producto A + Cantidad de producto B = 1 kg

Precio porción producto A + Precio porción producto B = $ 27

Incógnitas:

Cantidad producto A: x
Cantidad producto B: y

3. Resolución del modelo.

$$x + y = 1$$

$$35x + 18y = 27$$

$$x,y \in \mathbb{R}^+$$

$x =$ [ ]
$y =$ [ ]

Respuesta en el cuadro siguiente

Datos:

Precio producto A: $ 35
Precio producto B: $ 18
Precio mezcla: $ 27

Relaciones:

Cantidad de producto A + Cantidad de producto B = 1 kg

Precio porción producto A + Precio porción producto B = 27

Incógnitas:

Cantidad producto A: x
Cantidad producto B: y

Estado intermedio 3

Solución sujeta a verificación:

$x + y = 1$ ①

$35x + 18y = 27$ ②

$x, y \in \mathbb{R}^+$

De ①: $y = 1 - x$

Sustituyendo en ②:

$35x + 18(1-x) = 27$
$35x + 18 - 18x = 27$
$17x = 9$
$\mathbf{x = 9/17} \in \mathbb{R}^+$
$y = 1 - 9/17$
$\mathbf{y = 8/17} \in \mathbb{R}^+$

115

Regresamos al enunciado para comprobar si la solución obtenida satisface todos los requerimientos del problema.

116

Un comerciante tiene dos clases de productos:

- un producto A, que vende a $ 35 el kilo

y

- un producto B, que vende a $ 18 el kilo

Los clientes no compran el producto A, por caro, ni el producto B, por considerarlo de baja calidad a causa de su bajo precio.

Por lo tanto, se le ocurre hacer una mezcla de ambos que pueda vender a $ 27 el kilo, y nos pregunta qué cantidades debe tomar, por kilo, de cada producto.

12.5

Problemas que conducen a una desigualdad de primer grado con una incógnita, como modelo matemático.

120

Léase cuidadosamente este enunciado.

Estado inicial

En un taller que acabamos de montar podemos producir un ☒ en 15 minutos y un ◉ en 40 minutos.

Se requiere que la producción de ☒ s sea el doble de la de ◉ s.

¿Cuál es el número máximo de unidades completas de cada tipo que es posible producir en una jornada de 8 horas?

121

1. Comprensión del problema

¿Nos resulta

inteligible

el enunciado?

Respuesta abierta

119

Datos:

Precio producto A: $ 35
Precio producto B: $ 18
Precio mezcla: $ 27

Relaciones:

Cantidad de producto A +
Cantidad de producto B = 1 kg

Precio porción producto A
+ Precio porción producto B = $ 27

Incógnitas:

Cantidad producto A: 0.529
Cantidad producto B: 0.471

Estado final

en kg, por kg de producto mezcla.

Solución verificada

2.12.4.1

Práctica adicional
de
resolución de problemas
cuyo enunciado
conduce a un
sistema de dos o más ecuaciones
de primer grado,
como modelo matemático.

2.12.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *aplicar* el procedimiento estudiado de resolución de problemas, a enunciados escritos que conducen a un sistema de dos o más ecuaciones de primer grado, como modelo matemático.

12.5

Problemas que conducen a una desigualdad de primer grado con una incógnita, como modelo matemático.

120

Léase cuidadosamente este enunciado.

Estado inicial

En un taller que acabamos de montar podemos producir un ☒ en 15 minutos y un ◉ en 40 minutos.

Se requiere que la producción de ☒ s sea el doble de la de ◉ s.

¿Cuál es el número máximo de unidades completas de cada tipo que es posible producir en una jornada de 8 horas?

121

1. Comprensión del problema

¿Nos resulta

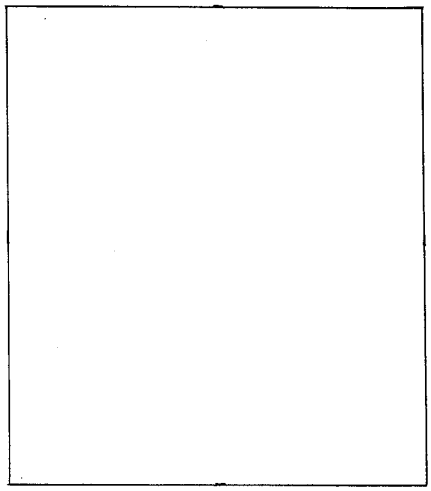
inteligible

el enunciado?

Respuesta abierta

122

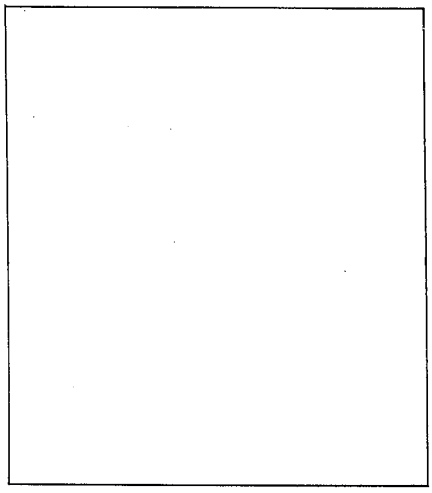
¿Cuáles son las **incógnitas?**



En un taller que acabamos de montar podemos producir un ☒ en 15 minutos y un ◉ en 40 minutos.
Se requiere que la producción de ☒ s sea el doble de la de ◉ s.
Cuál es el **número máximo de unidades completas de cada tipo que es posible producir en una jornada de 8 horas?**

123

¿Cuáles son los **datos?**



En un taller que acabamos de montar **podemos producir un ☒ en 15 minutos y un ◉ en 40 minutos.**
Se requiere que la producción de ☒ s sea el doble de la de ◉ s.
¿Cuál es el número máximo de unidades completas de cada tipo que es posible producir en una jornada de 8 horas?

124

Intentemos
señalar al menos, una

relación

que podamos identificar
en el enunciado.

En un taller que acabamos de montar podemos producir un ☒ en 15 minutos y un ◉ en 40 minutos.
Se requiere **que la producción de ☒ s sea el doble de la de ◉ s.**
¿Cuál es el número máximo de unidades completas de cada tipo que es posible producir en una jornada de 8 horas?

125

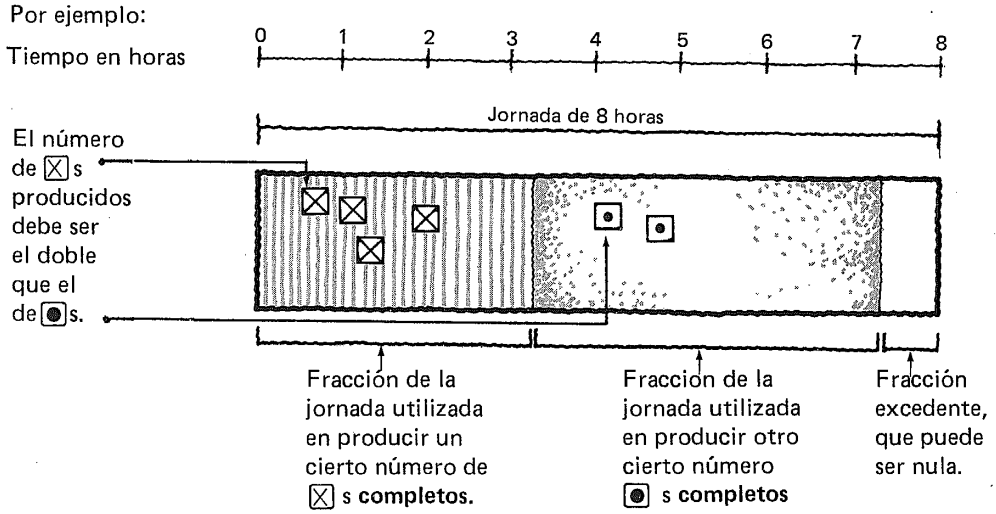
Hagamos un

croquis

que nos ayude a
entender mejor las relaciones
entre los datos y las incógnitas:

Respuesta
en el
cuadro siguiente

Por ejemplo:



126

Un croquis como el del cuadro anterior nos permite

identificar otra relación importante

que puede pasar desapercibida
en la lectura del enunciado.

Intentemos enunciarla:

La fracción de jornada
utilizada
en producir los ⊠s
más
la utilizada
en producir los ◉s
debe ser
menor o igual a
la jornada completa
(de 8 horas).

127

Completar la información organizada del enunciado.

Datos:	Relaciones:	Incógnitas:

Respuesta en el cuadro siguiente

Información organizada del enunciado:
Estado intermedio 1

Datos:	Relaciones:	Incógnitas:
Tiempo de producción de un [X]: **15 min** Tiempo de producción de un [●]: **40 min** Duración de la jornada: **8 horas**	La producción de [X]s debe ser el doble de la de [●]s. La fracción de jornada utilizada en producir los [X] s, más la utilizada en producir los [●] s debe ser menor o igual que la jornada completa.	Número máximo de [X]s producidos por jornada: ⌊ ⌋ Número máximo de [●] s producidos por jornada: ⌊ ⌋

128

¿Podemos **estimar** o **calcular mentalmente** los resultados?

Intentémoslo:

- Número máximo de [X] s producidos por jornada: ⌊ ⌋
- Número máximo de [●] s producidos por jornada: ⌊ ⌋

Respuesta abierta

129

Datos:
Tiempo producción de un ☒ : 15 min
Tiempo producción de un ● : 40 min
Duración jornada: 8 h
Relaciones:
La producción de ☒ s debe ser el doble que la de ● s.
La fracción de jornada para producir los ☒ s, más la fracción para producir los ● s debe ser menor o igual a la jornada total (8 horas).
Incógnitas:
Número máximo de ☒ s producidos por jornada: ____
Número máximo ● s producidos por jornada: ____

2. Construcción del modelo.

Sea

Número de ☒ s producidos por jornada = x

Número de ● s producidos por jornada en función de x = ____

$\frac{x}{2}$

130

Datos:
Tiempo producción de un ☒ : 15 min
Tiempo producción de un ● : 40 min
Duración jornada: 8 h
Relaciones:
La producción de ☒ s debe ser el doble que la de ● s.
La fracción de jornada para producir los ☒ s, más la fracción para producir los ● s debe ser menor o igual a la jornada total (8 horas).
Incógnitas:
Número máximo de ☒ s producidos por jornada: ____
Número máximo ● s producidos por jornada: ____

x = número de ☒ s producidos por jornada

$\frac{x}{2}$ = número de ● s producidos por jornada

a partir de la relación 1.

131

Datos:
Tiempo producción de un ☒ : 15 min
Tiempo producción de un ● : 40 min
Duración jornada: 8 h
Relaciones:
La producción de ☒ s debe ser el doble que la de ● s.
La fracción de jornada para producir los ☒ s, más la fracción para producir los ● s debe ser menor o igual a la jornada total (8 horas).
Incógnitas:
Número máximo de ☒ s producidos por jornada: ____
Número máximo de ● s producidos por jornada: ____

x = número de ☒ s producidos por jornada

$\frac{x}{2}$ = número de ● s producidos por jornada

Pongamos ahora el enunciado de la relación 2 en forma matemática:

____

Respuesta en el cuadro siguiente

Datos:
Tiempo producción de un ☒ : 15 min
Tiempo producción de un ● : 40 min
Duración jornada: 8 h

Relaciones:
La producción de ☒ s debe ser el doble que la de ● s.
La fracción de jornada para producir los ☒ s, más la fracción para producir los ● s debe ser menor o igual a la jornada total (8 horas).

Incógnitas:
Número máximo de ☒ s producidos por jornada:
Número máximo de ● s producidos por jornada: ⌊_____⌋

Fracción de jornada para producir x ☒ s

Fracción de jornada para producir x/2 ● s

Jornada en min

$$\underbrace{15x}_{\text{☒}} + \underbrace{40 \cdot \frac{x}{2}}_{\text{●}} \leqslant \underbrace{8x60}_{\text{min}}$$

o bien:

$$15x + 20x \leqslant 480$$

132

Datos:
Tiempo producción de un ☒ : 15 min
Tiempo producción de un ● : 40 min
Duración jornada: 8 h

Relaciones:
La producción de ☒ s debe ser el doble que la de ● s.
La fracción de jornada para producir los ☒ s, más la fracción para producir los ● s debe ser menor o igual a la jornada total (8 horas).

Incógnitas:
Número máximo de ☒ s producidos por jornada:
Número máximo de ● s producidos por jornada: ⌊_____⌋

$$15x + 20x \leqslant 480$$
$$x \in \lfloor____\rfloor$$

Dominio

$\mathbb{N}$

133

Datos:
Tiempo producción de un ☒ : 15 min
Tiempo producción de un ● : 40 min
Duración jornada: 8 h

Relaciones:
La producción de ☒ s debe ser el doble que la de ● s.
La fracción de jornada para producir los ☒ s, más la fracción para producir los ● s debe ser menor o igual a la jornada total (8 horas).

Incógnitas:
Número máximo de ☒ s producidos por jornada:
Número máximo de ● s producidos por jornada: ⌊_____⌋

$$15x + 20x \leqslant 480$$
$$x \in \mathbb{N}$$

Si observamos con atención veremos que se requiere, además, que:

$$\frac{x}{2} \in \lfloor____\rfloor$$

$\mathbb{N}$

134

Datos:
Tiempo producción de un ☒ : 15 min
Tiempo producción de un ◉ : 40 min
Duración jornada: 8 h

Relaciones:
La producción de ☒ s debe ser el doble que la de ◉ s.
La fracción de jornada para producir los ☒ s, más la fracción para producir los ◉ s debe ser menor o igual a la jornada total (8 horas).

Incógnitas:
Número máximo de ☒ s producidos por jornada: ____
Número máximo de ◉ s producidos por jornada: ____

$15x + 20x \leqslant 480$

$x \in \mathbb{N}$, $\frac{x}{2} \in \mathbb{N}$

Pero,
también observamos que:

Si $\frac{x}{2} \in \mathbb{N}$, entonces $x \in$ ____

por lo tanto,
basta con indicar el dominio así:

____

- $\mathbb{N}$

$\frac{x}{2} \in \mathbb{N}$

o bien:

$x \in \{2n / n \in \mathbb{N}\}$

o bien:

$x \in \mathbb{N} \wedge x$ es par

135

Estado intermedio 2.

Modelo:

$$15x + 20x \leqslant 480$$
$$x \in \mathbb{N} \wedge x \text{ es par}$$

Este modelo es un/una:

____

una **desigualdad de primer grado con una incógnita**

136

Datos:
Tiempo producción de un ☒ : 15 min
Tiempo producción de un ◉ : 40 min
Duración jornada: 8 h

Relaciones:
La producción de ☒ s debe ser el doble que la de ◉ s.
La fracción de jornada para producir los ☒ s, más la fracción para producir los ◉ s debe ser menor o igual a la jornada total (8 horas).

Incógnitas:
Número máximo de ☒ s producidos por jornada: ____
Número máximo de ◉ s producidos por jornada: ____

3. Resolución del modelo.

$15x + 20x \leqslant 480$
$x \in \mathbb{N} \wedge x$ es par

x ____ ____

Respuesta en el cuadro siguiente

Datos:
Tiempo producción de un ☒ : 15 min
Tiempo producción de un ◉ : 40 min
Duración jornada: 8 h

Relaciones:
La producción de ☒ s debe ser el doble que la de ◉ s.
La fracción de jornada para producir los ☒ s, más la fracción para producir los ◉ s debe ser menor o igual a la jornada total (8 horas).

Incógnitas:
Número máximo de ☒ s producidos por jornada: ⌊_____⌋
Número máximo de ◉ s producidos por jornada: ⌊_____⌋

$15x + 20x \leqslant 480$
$x \in \mathbb{N}$ x es par

$$35x \leqslant 480$$
$$x \leqslant \frac{480}{35}$$

$x \leqslant 13.71428571\ldots$

$13.71428571\ldots \notin \mathbb{N}$

$13 \in \mathbb{N}$ pero 13 no es par

$12 \in \mathbb{N} \wedge$ 12 es par

por lo tanto: $x \leqslant 12$

137

Estado intermedio 3

Solución sujeta a verificación.

Número máximo de ☒ s producidos por jornada: ⌊_____⌋ 12

Número máximo de ◉ s producidos por jornada: ⌊_____⌋ 6

138

4. Verificación de la solución obtenida.

Regresemos al enunciado para ver si se cumplen los requerimientos allí especificados.

139

En un taller que acabamos de montar podemos producir un ☒ en 15 minutos y un ◉ en 40 minutos.

Se requiere que la producción de ☒ s sea el doble de la de ◉ s.

¿Cuál es el número máximo de unidades completas de cada tipo que es posible producir en una jornada de 8 horas?

140

Datos:

Tiempo producción de un ☒ : 15 min
Tiempo producción de un ◉ : 40 min
Duración jornada: 8 h

Relaciones:

La producción de ☒ s debe ser el doble que la de ◉ s.
La fracción de jornada para producir los ☒ s, más la fracción para producir los ◉ s debe ser menor o igual a la jornada total (8 horas).

Incógnitas:

Número máximo de ☒ s producidos por jornada: ____
Número máximo de ◉ s producidos por jornada: ____

- Número máximo de ☒ s completos producidos por jornada de 8 h: ⟶ 12
- Número máximo de ◉ s completos producidos por jornada de 8 h: ⟶ 6
- Fracción de jornada utilizada en producir los 12 ☒ s: ⟶ $12 \times \frac{1}{4} = 3$ h ①
- Fracción de jornada utilizada en producir los 6 ◉ s: ⟶ $6 \times \frac{2}{3} = 4$ h ②
- Fracción de jornada utilizada en producir las 18 unidades completas: ⟶ 7 h

① 15 min $= \frac{1}{4}$ h

② 40 min $= \frac{2}{3}$ h

141

Datos:

Tiempo producción de un ☒ : 15 min
Tiempo producción de un ◉ : 40 min
Duración jornada: 8 h

Relaciones:

La producción de ☒ s debe ser el doble que la de ◉ s.
La fracción de jornada para producir los ☒ s, más la fracción para producir los ◉ s debe ser menor o igual a la jornada total (8 horas).

Incógnitas:

Número máximo de ☒ s producidos por jornada: ____
Número máximo de ◉ s producidos por jornada: ____

$x = 13$ ☒ s

y

$x/2 = 13/2$ ◉ s

No satisface las condiciones dadas en el enunciado, en que se pide "el número máximo de unidades completas de cada tipo".

142

Datos:
Tiempo producción de un ☒ : 15 min
Tiempo producción de un ◉ : 40 min
Duración jornada: 8 h

Relaciones:
La producción de ☒ s debe ser el doble que la de ◉ s.
La fracción de jornada para producir los ☒ s, más la fracción para producir los ◉ s debe ser menor o igual a la jornada total (8 horas).

Incógnitas:
Número máximo de ☒ s producidos por jornada: 12
Número máximo de ◉ s producidos por jornada: 6

$x = 14$ ☒ s

y

$x/2 = 7$ ◉ s

no satisface los requerimientos, puesto que:

- $14x \frac{1}{4} = 3.50$ h
- $7x \frac{2}{3} \doteq 4.67$ h
- $8.17\text{ h} > 8\text{ h}$

Estado final:
Solución verificada

143

Comparemos
la solución obtenida
con
la solución previamente estimada.

2.12.5.1

Práctica adicional
de
resolución de problemas
cuyo enunciado
conduce a
una desigualdad
o
dos desigualdades de primer grado
con una incógnita
como modelo matemático.

2.12.5

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *aplicar* el procedimiento estudiado de resolución de problemas, a enunciados escritos que conducen a una desigualdad o un sistema de desigualdades de primer grado con una incógnita, como modelo matemático.

12.6

Problemas que conducen a desigualdades de segundo grado, como modelo matemático

144

Léase cuidadosamente este enunciado.

Estado inicial

Un administrador de bienes raíces ha encontrado que puede estimar la ganancia mensual, proveniente de la renta de un edificio de n pisos, por medio de la expresión:

$$G = 26.67n - 1.48n^2$$

en que G es la ganancia en miles de pesos, y quiere saber el número de pisos que debe tener un edificio, para que le deje una ganancia, cuando menos, igual a cien mil pesos.

145

1. Comprensión del problema.

¿Cuáles son las **incógnitas?**

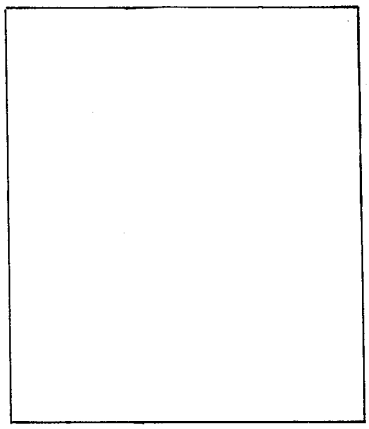
Un administrador de bienes raíces ha encontrado que puede estimar la ganancia mensual, proveniente de la renta de un edificio de n pisos, por medio de la expresión:

$G = 26.67n - 1.48n^2$

en que G es la ganancia en miles de pesos, y quiere saber el **número de pisos** que debe tener un edificio, para que le deje una ganancia, cuando menos, igual a cien mil pesos.

146

¿Cuáles son los **datos?**



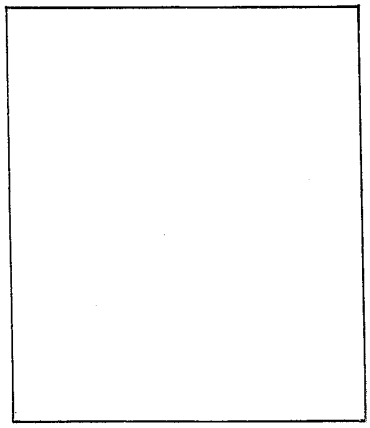
Un administrador de bienes raíces ha encontrado que puede estimar la ganancia mensual, proveniente de la renta de un edificio de n pisos, por medio de la expresión:

$G = 26.67n - 1.48n^2$

en que G es la ganancia en miles de pesos, y quiere saber el número de pisos que debe tener un edificio, para que le deje una **ganancia, cuando menos, igual a cien mil pesos.**

147

¿Qué **relaciones** podemos identificar entre los datos y las incógnitas?



Un administrador de bienes raíces ha encontrado que puede estimar la ganancia mensual, proveniente de la renta de un edificio de n pisos, por medio de la expresión:

$G = 26.67n - 1.48n^2$

en que G es la ganancia en miles de pesos, y quiere saber el número de pisos que debe tener un edificio, para que le deje una ganancia, cuando menos, igual a cien mil pesos.

148

¿Hay información no esencial?

¿Sobran datos?

[Sí] Señalar y eliminar*

[No]

*Tachar en el enunciado la información no esencial.

~~Un administrador de bienes raíces ha encontrado que puede estimar la ganancia mensual, proveniente de la renta de un~~ edificio de n pisos, ~~por medio de la expresión:~~

$G = 26.67n - 1.48n^2$

~~en que~~ G es la ganancia en miles de pesos, ~~y quiere saber el~~ número de pisos ~~que debe tener un edificio,~~ para ~~que le deje~~ una ganancia, cuando menos, igual a cien mil pesos.

149

Completar la información organizada del enunciado:

Datos:	Relaciones:	Incógnitas:

Respuesta
en el
cuadro siguiente

Estado intermedio 1

Información organizada del enunciado:

Datos:	Relaciones:	Incógnitas:
Ganancia mínima (G) $ 100 000	$G = 26.67\,n - 1.48\,n^2$	Número de pisos: (n)

150

¿Podemos **estimar** o **calcular mentalmente** la solución?

Intentémoslo:

- Número estimado de pisos para que la ganancia sea, cuando menos, de $ 100 000:

Respuesta abierta

151

Datos:

Ganancia mínima requerida:
$ 100 000

Relaciones:

$G = 26.67n - 1.48n^2$

Incógnitas:

Número de pisos: ⌊_____⌋

2. Construcción del modelo.

Modelo matemático:

⌊_____⌋

Respuesta
en el
cuadro siguiente

Datos:

Ganancia mínima requerida:
$ 100 000

Relaciones:

$G = 26.67 - 1.48n^2$

Incógnitas:

Número de pisos: ⌊_____⌋

$26.67n - 1.48n^2 \geqslant 100$

$n \in$ ⌊_____⌋
↑
Dominio

$\mathbb{N}$

152

Datos:

Ganancia mínima requerida:
$ 100 000

Relaciones:

$G = 26.67n - 1.48n^2$

Incógnitas:

Número de pisos: ⌊_____⌋

Estado intermedio 2

Modelo matemático:

$$\mathbf{26.67n - 1.48n^2 \geqslant 100}$$
$$\mathbf{n \in \mathbb{N}}$$

153

3. Resolución del modelo.

$$26.67n - 1.48n^2 \geqslant 100 \qquad n \in \mathbb{N}$$

Desigualdad equivalente de la forma $ax^2 + bx + c \leqslant 0$:

Respuesta en el cuadro siguiente

154

$$-1.48n^2 + 26.67n - 100 \geqslant 0$$

Desigualdad equivalente, con el primer miembro expresado como el producto de dos factores, uno de los cuales es el coeficiente de n^2.

Respuesta en el cuadro siguiente

$$-1.48(n^2 - 18.02n - 67.57) \geqslant 0$$

Recordemos que esto puede expresarse así:

$$-1.48(n - n_1)(n - n_2) \geqslant 0$$

siendo n_1 y n_2 las raíces de la ecuación:

$$-1.48n^2 + 26.67n - 100 = 0$$

o de la ecuación:

$$1.48n^2 - 26.67n + 100 = 0$$

155

$$1.48n^2 - 26.67n + 100 = 0$$

↓

$n_1 =$ [ ]

$n_2 =$ [ ]

Respuesta en el cuadro siguiente

$$1.48n^2 - 26.67n + 100 = 0$$

$$n \doteq \frac{26.67 \pm \sqrt{711.29 - 592.00}}{2.96}$$

$$n \doteq \frac{26.67 \pm \sqrt{119.29}}{2.96} \doteq \frac{26.67 \pm 10.92}{2.96}$$

- $n_1 \doteq 5.32$
- $n_2 \doteq 12.70$

156

Entonces:

$$-1.48\,(n - n_1)\,(n - n_2) \geqslant 0$$

↓

$$-1.48\,(n - 5.32)\,(n - 12.70) \geqslant 0$$

Desigualdad equivalente que resulta de dividir ambos miembros por -1.48:

↓

[ ]

Respuesta en el cuadro siguiente

157

$$(n - 5.32)(n - 12.70) \leqslant 0$$

Sistema equivalente de cuatro desigualdades de primer grado:

Respuesta en el cuadro siguiente

158

$$(n - 5.32)(n - 12.70) \leqslant 0$$

$$\begin{bmatrix} n - 5.32 \geqslant 0 \\ n \sqcup\!\llcorner \\ \wedge \\ n - 12.70 \leqslant 0 \\ n \sqcup\!\llcorner \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} n - 5.32 \leqslant 0 \\ n \sqcup\!\llcorner \\ \wedge \\ n - 12.70 \geqslant 0 \\ n \sqcup\!\llcorner \end{bmatrix}$$

Respuesta en el cuadro siguiente

159

$$(n - 5.32)(n - 12.70) \leqslant 0$$

$$\begin{bmatrix} n - 5.32 \leqslant 0 \\ n \geqslant 5.32 \\ \wedge \\ n - 12.70 \leqslant 0 \\ n \leqslant 12.70 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} n - 5.32 \leqslant 0 \\ n \leqslant 5.32 \\ \wedge \\ n - 12.70 \geqslant 0 \\ n \geqslant 12.70 \end{bmatrix}$$

$S_1 = \llcorner\!\!\lrcorner$ $S_2 = \llcorner\!\!\lrcorner$

como intervalo

Respuesta en el cuadro siguiente

160

$$(n - 5.32)(n - 12.70) \leqslant 0$$

$$\left[\begin{array}{l} n - 5.32 \geqslant 0 \\ n \geqslant 5.32 \\ \wedge \\ n - 12.70 \leqslant 0 \\ n \leqslant 12.70 \end{array}\right] \vee \left[\begin{array}{l} n - 5.32 \leqslant 0 \\ n \leqslant 5.32 \\ \wedge \\ n - 12.70 \geqslant 0 \\ n \geqslant 12.70 \end{array}\right]$$

- $S_1 = [5.32, 12.70]$
- $S_2 = [\quad]$
- $S' = S_1 __ S_2 = $ _____

Respuesta en el cuadro siguiente

$$(n - 5.32)(n - 12.70) \leqslant 0$$

$$\left[\begin{array}{l} n - 5.32 \geqslant 0 \\ n \geqslant 5.32 \\ \wedge \\ n - 12.70 \leqslant 0 \\ n \leqslant 12.70 \end{array}\right] \vee \left[\begin{array}{l} n - 5.32 \leqslant 0 \\ n \leqslant 5.32 \\ \wedge \\ n - 12.70 \geqslant 0 \\ n \geqslant 12.70 \end{array}\right]$$

- $S^1 = [5.32, 12.70]$
- $S_2 = [\quad]$

$S' = S_1 \cup S_2 = [5.32, 12.70]$

161

Atención.

Desigualdad original:

$$26.67n - 1.48n^2 \geqslant 100 \qquad n \in \mathbb{N}$$

Hemos obtenido:

$$S' = [5.32, 12.70]$$

Conjunto solución representado **por extensión** o enumeración de sus elementos:

$S =$ _____

Respuesta en el cuadro siguiente

Estado intermedio 3.

Solución sujeta a verificación:

$$26.67n - 1.48n^2 \geqslant 100 \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$\downarrow$$

$$S = \{6,7,8,9,10,11,12\}$$

162

De nuevo leamos detenidamente el enunciado:

Un administrador de bienes raíces ha encontrado que puede estimar la ganancia mensual, proveniente de la renta de un edificio de n pisos, por medio de la expresión.

$$G = 26.67 - 1.48n^2$$

en que G es la ganancia en miles de pesos, y quiere saber el número de pisos que debe tener un edificio, para que le deje una ganancia, cuando menos, igual a cien mil pesos.

163

Datos:

Ganancia mínima requerida:

$ 100 000

Relaciones:

$G = 26.67n - 1.48n^2$

Incógnitas:

Número de pisos:

4. Verificación de la solución obtenida.

Número de pisos que debe tener un edificio para que deje a nuestro administrador una ganancia de, cuando menos, cien mil pesos mensuales:

6,7,8,9,10,11 o 12

Veamos el cuadro siguiente.

164

Datos:

Ganancia mínima requerida:

$ 100 000

Relaciones:

$G = 26.67n - 1.48n^2$

Incógnitas:

Número de pisos: [ ]

Por ejemplo:

Un edificio de **6** pisos deja una ganancia de: [ ]

Un edifico de **9** pisos deja una ganancia de: [ ]

Un edificio de **12** pisos deja una ganancia de: [ ]

Respuesta en el cuadro siguiente

Datos:

Ganancia mínima requerida:

$ 100 000

Relaciones:

$G = 26.67n - 1.48n^2$

Incógnitas:

Número de pisos: [ ]

- $n = 6$ • $G = 106\,740$

  $106\,740 \geqslant 100\,000$ ✓

- $n = 9$ • $G = 120\,150$

  $120\,150 \geqslant 100\,000$ ✓

- $n = 12$ • $G = 106\,920$

  $106\,920 \geqslant 100\,000$ ✓

165

Datos:

Ganancia mínima requerida:

$ 100 000

Relaciones:

$G = 26.67n - 1.48n^2$

Incógnitas:

Número de pisos: [ ]

Por otra parte:

Si $n = 5$ $G =$ [ ]

Si $n = 13$ $G =$ [ ]

Si $n = 0$ $G =$ [ ]

Respuesta en el cuadro siguiente

Datos:

Ganancia mínima requerida:

$ 100 000

Relaciones:

$G = 26.67n - 1.48n^2$

Incógnitas:

Número de pisos: [ ]

- Si $n = 5$ • $G = 96\,350$

  $96\,350 < 100\,000$

- Si $n = 13$ • $G = 96\,590$

  $96\,590 < 100\,000$

- Si $n = 0$ • $G = 0$

  $0 < 100\,000$

166

Datos:

Ganancia mínima requerida:

$ 100 000

Relaciones:

$G = 26.67n - 1.48n^2$

Incógnitas:

Número de pisos: [6,12]

Estado final
Solución verificada.

Comparemos la solución obtenida con la previamente estimada.

2.12.6.1

Práctica adicional
de
resolución de problemas
cuyo enunciado conduce a
una desigualdad
o a
un sistema de desigualdades
de segundo grado
con una incógnita
como modelo matemático.

2.12.6

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *aplicar* el procedimiento estudiado de resolución de problemas, a enunciados escritos que conducen a una desigualdad o a un sistema de desigualdades de segundo grado con una incógnita, como modelo matemático.

12.7

Problemas que conducen a ecuaciones exponenciales o logarítmicas, como modelo matemático

167

Léase cuidadosamente este enunciado.

Estado inicial.

Por medio de la expresión $N_t = N_o e^{rt}$ podemos estimar la población (número de habitantes) N_t de un determinado conglomerado social, al cabo de t años a partir del momento en que la población es igual a N_o y para una tasa neta de crecimiento r.

Este modelo nos permite predecir, con cierto margen de error, en cuántos años se duplicará la población de una ciudad de 20 millones de habitantes, si sabemos que la tasa neta de crecimiento es de 3.2% al año.

168

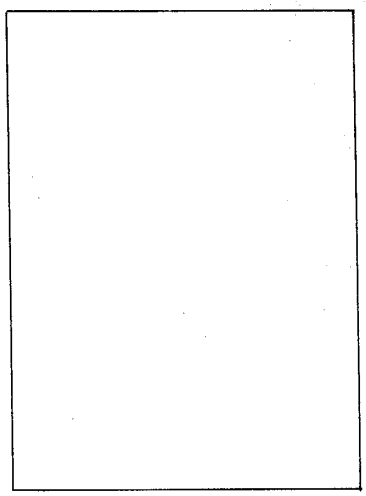
1. Comprensión del problema.

¿Cuáles son las **incógnitas?**

en cuántos años se duplicará la población

169

¿Cuáles son los **datos?**



Población: 20 millones de habitantes.
Tasa neta de crecimiento: 3.2% al año.

170

¿Conocemos el

significado

de

todos

los

términos

del enunciado?

Respuesta abierta

171

Una frase que puede requerir alguna explicación:

tasa neta de crecimiento

172

Llamamos

tasa neta de crecimiento

a la diferencia entre la

tasa de natalidad

y la

tasa de mortalidad.

173

Supongamos que,
en un momento dado
de la vida de una población

nacen

en un año
4.6 individuos por cada cien habitantes.
Entonces, decimos que la

tasa de natalidad = **4.6**% anual = **0.046** por individuo por año.

174

Si

mueren

1.4 individuos de cada cien
en un año,
decimos que
la

tasa de mortalidad = [_____] = [_____]

- 1.4% anual
- 0.014 por individuo por año.

175

Entonces
la

tasa neta de crecimiento

será igual a

4.6 − 1.4 = 3 2% anual,
o bien:
0.046 − 0.014 = 0.032 por individuo por año.

176

Completar la información organizada del enunciado

Datos:	**Relación:**	**Incógnita:**

Respuesta
en el
cuadro siguiente

Estado intermedio 1

Información organizada del enunciado.

Datos:	**Relación:**	**Incógnita:**
Población inicial 20 000 000 hab. Tasa neta de crecimiento 3.2% al año	$N_t = N_0 e^{rt}$	Tiempo requerido para que la población se duplique, en años:

177

¿Podemos **estimar** o **calcular mentalmente** la solución?

Intentémoslo:

- Número estimado de años requeridos para que la población se duplique:

Respuesta abierta

178

Datos:

Población inicial:

20 000 000 hab.

Tasa neta de crecimiento:

3.2% al año

Relación:

$N_t = N_0 e^{rt}$

Incógnita:

Tiempo requerido para que la población se duplique, en años:

2. Construcción del modelo.

Modelo:

Respuesta en el cuadro siguiente

Datos:

Población inicial:

20 000 000 hab.

Tasa neta de crecimiento:

3.2% al año

Relación:

$N_t = N_0 e^{rt}$

Incógnita:

Tiempo requerido para que la población se duplique, en años:

De: $N_t = N_0 e^{rt}$

$$e^{rt} = \frac{N_t}{N_0}$$

Como $N_t = 2N_0$ y $r = 0.032$

$$e^{0.032t} = \frac{2N_0}{N_0} = 2$$

$$\downarrow$$

$$e^{0.032t} = 2 \qquad t \in \mathbb{R}^+$$

179

Datos:

Población inicial:

20 000 000 hab.

Tasa neta de crecimiento

3.2% al año

Relación:

$N_t = N_0 e^{rt}$

Incógnita:

Tiempo requerido para que la población se duplique, en años:

Modelo:

↓

$e^{0.032t} = 2$

$t \in \mathbb{R}^+$

Observamos que, en la información dada "sobra" un dato; identificarlo:

Respuesta en el cuadro siguiente

Datos:

~~Población inicial:~~

~~s 20 000 000 hab.~~

Tasa neta de crecimiento:

3.2% al año

Relación:

$N_t = N_o e^{rt}$

Incógnita:

Tiempo requerido para que la población se duplique, en años:

El dato de la población inicial

$N_o = 20\,000\,000$

no se necesita para determinar la solución, nos interesa únicamente la relación

N_t/N_o

que, en nuestro caso, debe ser igual a

2.

180

Dato:

Tasa neta de crecimiento:

3.2% al año

Relación:

$N_t = N_o e^{rt}$

Incógnita:

Tiempo requerido para que la población se duplique, en años:

3. Resolución del modelo.

$e^{0.032t} = 2 \quad t \in \mathbb{R}^+$

↓

$t =$

Respuesta en el cuadro siguiente

Dato:
Tasa neta de crecimiento:
3.2% al año

Relación:

$N_t = N_o e^{rt}$

Incógnita:

Tiempo requerido para que la población se duplique, en años:

$e^{0.032t} = 2 \quad t \in \mathbb{R}^+$

"Tomando logaritmos naturales":*

$\ln e^{0.032t} = \ln 2$

Aplicando la tercera propiedad de los logaritmos:

$0.032t \ln e = \ln 2$

Sustituyendo $\ln e = 1$

$0.032t = \ln 2$

$0.032t = \ln 2$

De donde:

$$t = \frac{\ln 2}{0.032}$$

Sustituyendo:

$\ln 2 = 0.69314718$

$$t = \frac{0.69314718}{0.032}$$

$\mathbf{t = 21.66} \quad \in \mathbb{R}^+$

*O también: logaritmos comunes.

181

Dato:

Tasa neta de crecimiento:
3.2% al año

Relación:

$N_t = N_o e^{rt}$

Incógnita:

Tiempo requerido para que la población se duplique, en años:

Estado intermedio 3.
Solución sujeta a verificación

Tiempo requerido para que la población se duplique:

21.66 años.

182

Dato:

Tasa neta de crecimiento:
3.2% al año

Relación:

$N_t = N_o e^{rt}$

Incógnita:

Tiempo requerido para que la población se duplique, en años:

$t \doteq 21.66$ años

¿Nos parece razonable esta solución?

Comparémosla con la previamente estimada

183

Dato:

Tasa neta de crecimiento:
3.2% al año

Relación:

$N_t = N_o e^{rt}$

Incógnita:

Tiempo requerido para que la población se duplique, en años:
_____

4. Verificación de la solución obtenida.

$N_t = N_o e^{rt}$

$N_t = 20\,000\,000\, e^{.032 \times 21.66}$

$N_t = 20\,000\,000\, e^{0.69312}$

$N_t = 20\,000\,000 \times 1.99999456$

$N_t = 39\,998\,912 \doteq 40\,000\,000$

184

Dato:

Tasa neta de crecimiento:
3.2% al año

Relación:

$N_t = N_o e^{rt}$

Incógnita:

Tiempo requerido para que la población se duplique, en años:
21.66 ←**Solución verificada.**

Estado final.

2.12.7.1

Práctica adicional
de
resolución de problemas
cuyo enunciado
conduce a una
ecuación exponencial
o a una
ecuación logarítmica
como
modelo matemático.

2.12.7

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *aplicar* el procedimiento estudiado de resolución de problemas, a enunciados que conducen a ecuaciones exponenciales o logarítmicas, como modelo matemático.

12.8

Problemas que conducen a un sistema de desigualdades lineales, como modelo matemático

185

Un problema
de
la rama de la
matemática aplicada
que se conoce
con el nombre de

programación lineal.

186

Léase cuidadosamente este enunciado:

Estado inicial.

1. Planeamos fabricar dos productos de calidad diferente, **A** y **B**.
2. Disponemos de 800 kg de ingrediente **a**, 480 de ingrediente **b** y 170 de ingrediente **c**.
3. Para la elaboración de una pieza de producto **A** necesitamos 200 g de **a**, 240 de **b** y 115 de **c**.
4. Para obtener una pieza de producto **B** se requieren 320 g de **a**, 160 de **b** y 50 de **c**.
5. Cada pieza de **A** se vende con una utilidad de 60 pesos, y cada pieza de **B** con una utilidad de 80 pesos.
6. ¿Qué número de piezas de cada producto debemos fabricar para

187

1. Comprensión de la situación

¿Conocemos el

significado

de

todos

y cada uno de los

términos

del enunciado?

Respuesta abierta

188

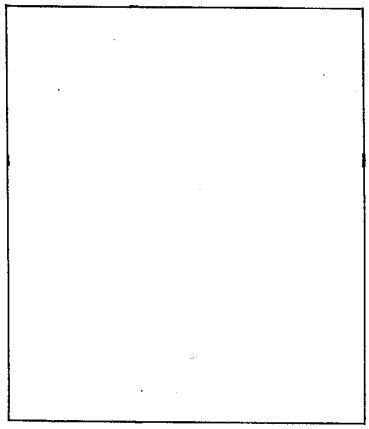
¿Qué buscamos?
o bien:

¿Cuál es la

incógnita

o cuáles son las

incógnitas?



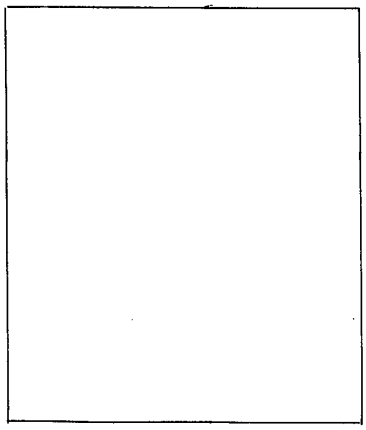
Número de piezas de cada producto para obtener la utilidad máxima.

189

¿De qué disponemos?
o bien:

¿Cuáles son los

datos?



800 kg de ingrediente a,
480 kg de ingrediente b
y 170 de ingrediente c.

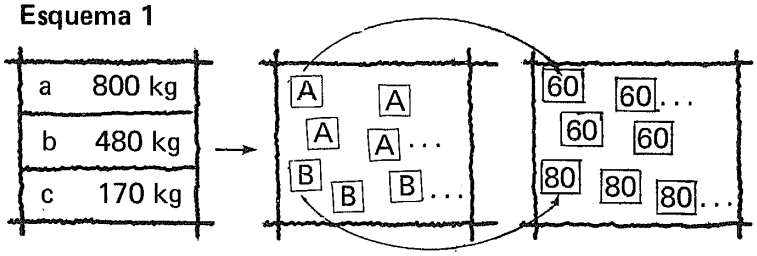
190

Croquis o esquema(s) y auxiliar(es):

Respuesta
en el
cuadro siguiente

Por ejemplo:
Podríamos "esquematizar" los incisos 1,2,5 y 6 del enunciado, en esta forma:

Esquema 1



Con estas cantidades de ingredientes...

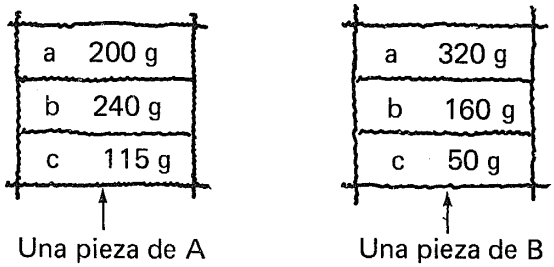
... fabricamos: un cierto número de As y un cierto número de Bs.

De modo que: la utilidad sea máxima.

191

Los incisos 3 y 4 del enunciado podríamos "esquematizarlos" así:

Esquema 2



192

Intentemos
identificar — con ayuda del diagrama 1 —
algunas

relaciones

entre
datos e incógnitas

Véase cuadro siguiente

193

1. La cantidad de ingrediente a utilizada en la elaboración de un cierto número de As y otro cierto número de Bs debe ser igual o menor que 800 kg.
2. La cantidad de ingrediente b utilizada en la elaboración de los As y los Bs debe ser igual o menor que 480 kg.
3. La cantidad utilizada de ingrediente c debe ser igual o menor que 170 kg.
4. La utilidad obtenida de la venta de los As, más la obtenida de la venta de los Bs es igual a la utilidad total.

194

Completar la información organizada del enunciado, empezando por los datos.

Datos:

Respuesta
en el
cuadro siguiente

Datos:

- Cantidades disponibles de ingredientes, en kg:
  de a → 800 de b → 480 de c → 170
- Cantidades requeridas para elaborar un A, en g:
  de a → 200 de b → 240 de c → 115
- Cantidades requeridas para elaborar un B, en g:
  de a → 320 de b → 160 de c → 50
- Utilidad obtenida de la venta, en pesos:
  de un A → 60 de un B → 80

195

Incógnitas:

Respuesta
en el
cuadro siguiente

Incógnitas:

- Número de unidades
  que se requiere producir
  para que la utilidad
  sea máxima:

  de A: ⌊_____⌋

  de B: ⌊_____⌋

196

Relaciones:

Respuesta
en el
cuadro siguiente

Relaciones:

1. Cantidad utilizada de **a** $\leqslant$ **800** kg.
2. Cantidad utilizada de **b** $\leqslant$ **480** kg.
3. Cantidad utilizada de **c** $\leqslant$ **170** kg.
4. Utilidad obtenida de **A** + utilidad obtenida de **B** = utilidad total.

197

Intentemos

estimar

o

calcular mentalmente

la solución.

Cantidad requerida de As [ ] } para obtener la utilidad máxima.

Cantidad requerida de Bs [ ]

Respuesta abierta

198

2. Construcción del modelo matemático.

Sean:

x = número de unidades de producto A

y

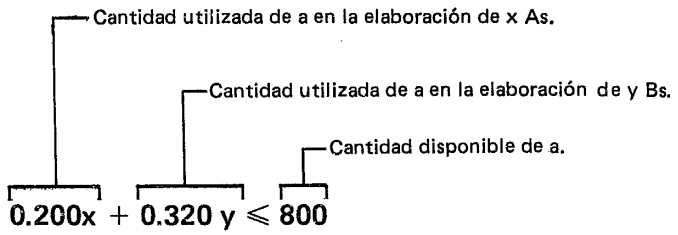
y = número de unidades de producto B

199

Relación 1 expresada matemáticamente:

Respuesta
en el
cuadro siguiente

200



Relación 2 expresada matemáticamente:

Respuesta
en el
cuadro siguiente

201

$0.200x + 0.320y \leqslant 800$

$0.240x + 0.160y \leqslant 480$

Expresión matemática de la relación 3:

Respuesta
en el
cuadro siguiente

$0.200x + 0.320y \leqslant 800$

$0.240x + 0.160y \leqslant 480$

$0.115x + 0.050y \leqslant 170$

202

$0.200x + 0.320y \leqslant 800$

$0.240x + 0.160y \leqslant 480$

$0.115x + 0.050y \leqslant 170$

Expresión matemática de la relación 4:

Respuesta
en el
cuadro siguiente

Estado intermedio 2

El modelo matemático:

$$0.200x + 0.320y \leqslant 800$$
$$\wedge$$
$$0.240x + 0.160y \leqslant 480$$
$$\wedge$$
$$0.115x + 0.050y \leqslant 170$$

$$U = 60x + 80y$$

$x \in \mathbb{R} \wedge x \geqslant 0$
$y \in \mathbb{R} \wedge y \geqslant 0$

203

3. Resolución del modelo.

Vamos a resolver
gráficamente
el

sistema de tres desigualdades de primer grado con dos incógnitas

que
forma parte
de nuestro modelo.

204

Tomemos la desigualdad 1:

$$0.200x + 0.320y \leqslant 800 \quad ①$$
$$\wedge$$
$$0.240x + 0.160y \leqslant 480 \quad ②$$
$$\wedge$$
$$0.115x + 0.050y \leqslant 170 \quad ③$$

$$U = 60x + 80y$$

$x \in \mathbb{R} \wedge x \geqslant 0$
$y \in \mathbb{R} \wedge y \geqslant 0$

205

$$0.200x + 0.320y \leqslant 800$$
$$x \in \mathcal{R} \wedge x \geqslant 0$$
$$y \in \mathcal{R} \wedge y \geqslant 0$$

Recordemos que para determinar **gráficamente** el conjunto solución de una desigualdad como ésta:

1. Empezamos expresándola como una desigualdad equivalente de la forma: $y \leqslant ax + b$
2. Trazamos la gráfica de: $y = ax + b$
3. Señalamos la región correspondiente a: $y \leqslant ax + b$

206

$$0.200x + 0.320y \leqslant 800$$

Desigualdad equivalente de la forma $y \leqslant ax + b$:

↓

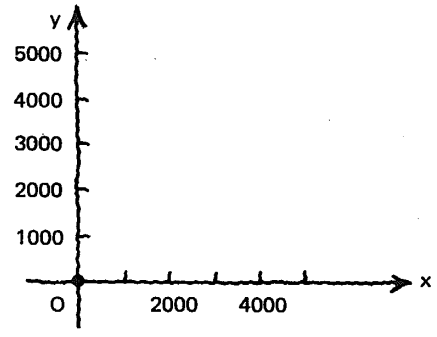
$$y \leqslant -0.625x + 2500$$

207

Trazar la gráfica de:

↓

$$y = -0.625x + 2500$$
$$x, y \in \mathcal{R}$$
$$x \geqslant 0$$
$$y \geqslant 0$$



Respuesta en el cuadro siguiente

208

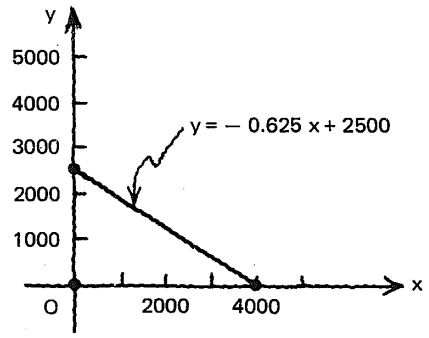
Señalar la región correspondiente a:

$$y \leqslant -0.625x + 2500$$

$$x, y \in \mathcal{R}$$

$$x \geqslant 0$$

$$y \geqslant 0$$



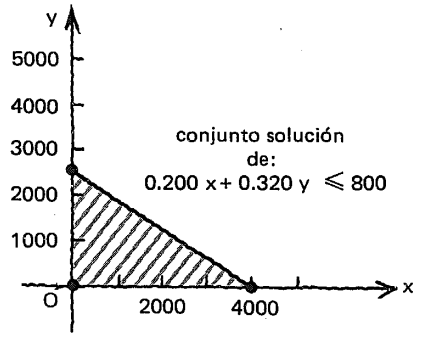
Respuesta en el cuadro siguiente

Determinar gráficamente el conjunto solución de:

$$0.240x + 0.160y \leqslant 480$$

$$x \in \mathcal{R} \wedge x \geqslant 0$$

$$y \in \mathcal{R} \wedge y \geqslant 0$$



209

Tomemos la desigualdad 2:

$$0.200x + 0.320y \leqslant 800 \quad ①$$

$$\wedge$$

$$0.240x + 0.160y \leqslant 480 \quad ②$$

$$\wedge$$

$$0.115x + 0.050y \leqslant 170 \quad ③$$

$$U = 60x + 80y$$

$$y \in \mathcal{R} \wedge x \geqslant 0$$

$$x \in \mathcal{R} \wedge y \geqslant 0$$

y expresemos gráficamente su conjunto solución.

Respuesta en el cuadro siguiente

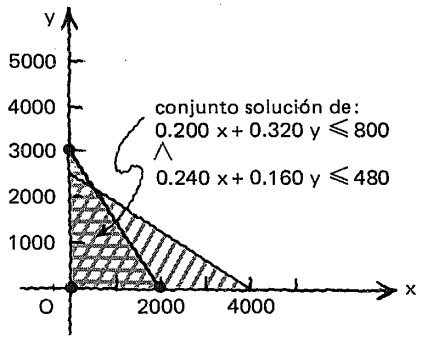
La región

representa
el conjunto solución
de:

$0.240x + 0.160y \leqslant 480$

$x \in \mathbb{R} \quad x \geqslant 0$

$y \in \mathbb{R} \quad y \geqslant 0$



210

Tomemos la desigualdad 3:

$$0.200x + 0.320y \leqslant 800 \quad ①$$
$$\wedge$$
$$0.240x + 0.160y \leqslant 480 \quad ②$$
$$\wedge$$
$$0.115x + 0.050y \leqslant 170 \quad ③$$

$$U = 60x + 80y$$

$x \in \mathbb{R} \quad x \geqslant 0$

$y \in \mathbb{R} \quad y \geqslant 0$

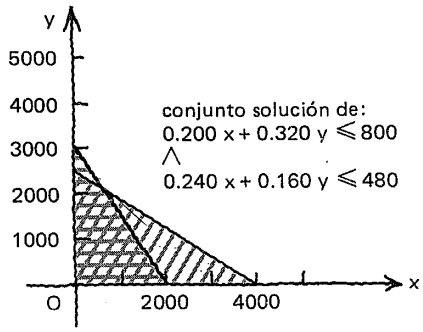
211

Determinemos
ahora
el conjunto solución
de:

$0.115x + 0.050y \leqslant 170$

$x \in \mathbb{R} \quad x \geqslant 0$

$y \in \mathbb{R} \quad y \geqslant 0$



Respuesta
en el
cuadro siguiente

212

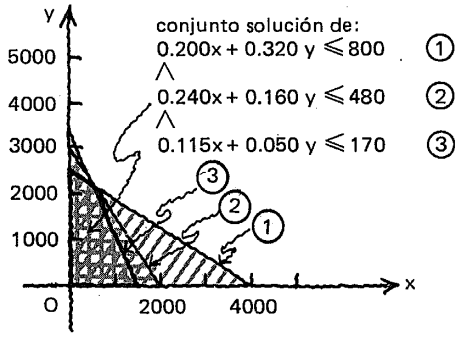
La región

representa el conjunto solución de:

$0.115x + 0.050y \leqslant 170$

$x \in \mathbb{R} \wedge x \geqslant 0$

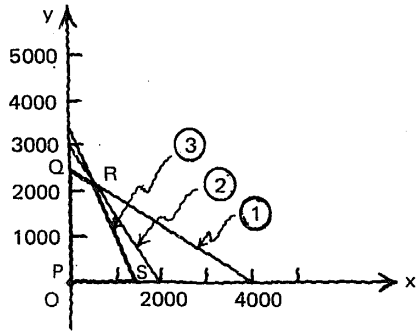
$y \in \mathbb{R} \wedge y \geqslant 0$



Señalar el conjunto solución del sistema de las tres desigualdades.

Respuesta en el cuadro siguiente

Todos los puntos que están dentro del cuadrilátero PQRS, incluyendo los del contorno, satisfacen las tres desigualdades dadas.



213

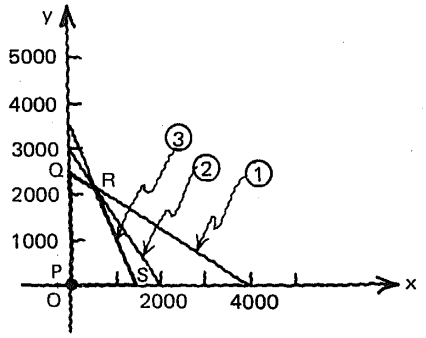
Pares ordenados correspondientes a cada uno de los vértices del cuadrilátero PQRS:

P = (_____)

Q = (_____)

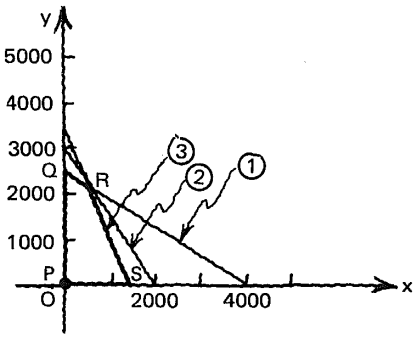
S = (_____)

R = (_____)



Respuesta en el cuadro siguiente

P = (0,0)
Q = (0,2500)
S = (1478.26,0)
R = (537.31,2164.18)*



* Intersección de las rectas 1 y 3.

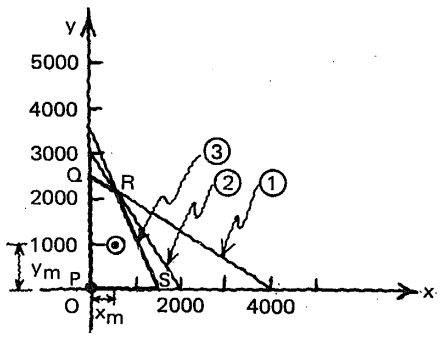
214

El problema
consiste
ahora
en determinar
el punto
(x_m, y_m)
para el cual
la

utilidad

es

máxima.



215

Observemos
que
la utilidad está dada por la expresión

$$U = 60x + 80y$$

se trata, entonces,
de determinar un par:
$(x_m, y_m) \in S$ (conjunto solución encontrado)
que haga máximo
el valor de la expresión: $60x + 80y$.

216

Atención.

$$U = 60x + 80y$$

Expresión equivalente de la forma:

$$y = ax + b$$

$$\square$$

$$y = -\frac{3x}{4} + \frac{U}{80}$$

217

$$U = 60x + 80y \longrightarrow y = -\frac{3x}{4} + \frac{U}{80}$$

Si, por ejemplo,
$U = 0$
la expresión se transforma en

$$\square$$

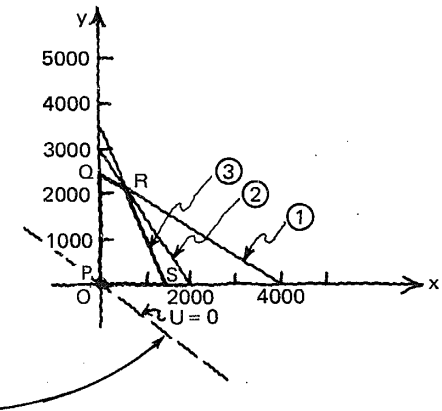
$$y = -\frac{3}{4}x$$

218

Atención.

$$y = -\frac{3}{4}x$$

es la ecuación de una recta que podemos representar en el plano cartesiano así:



219

Si la utilidad es, digamos igual a 110 000

la expresión:

$$y = -\frac{3x}{4} + \frac{U}{80}$$

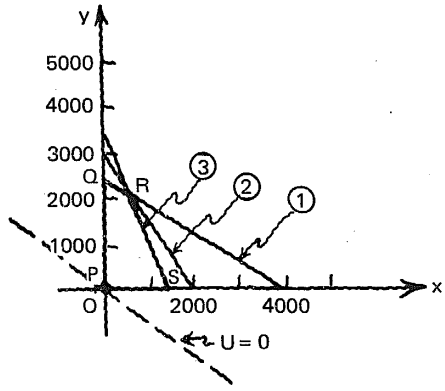
se transforma en:

$$y = -\frac{3x}{4} + 1375$$

220

Trazar la gráfica de:

$$y = -\frac{3x}{4} + 1375$$



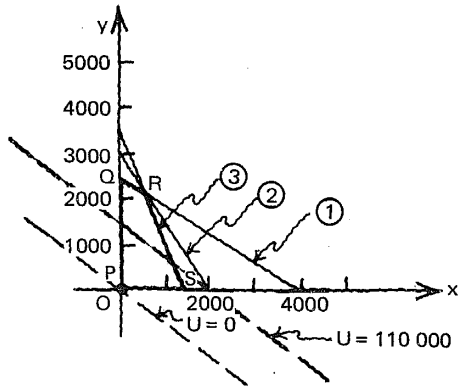
Respuesta en el cuadro siguiente

Observamos que:

$$y = -\frac{3x}{4} + \frac{U}{80}$$

representa un conjunto de rectas paralelas de pendiente igual a $-\frac{3}{4}$

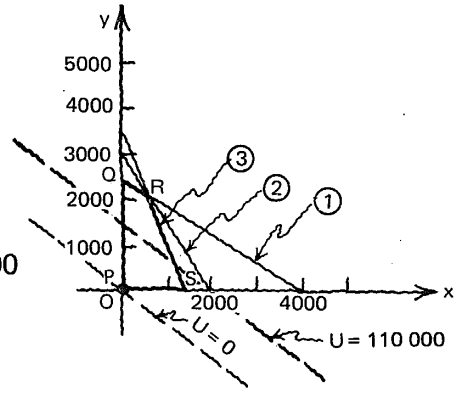
y ordenada al origen igual a U/80.



221

Por ejemplo,
trazar la recta
correspondiente a
la utilidad:

$U = 2000 \times 80 = 160\,000$

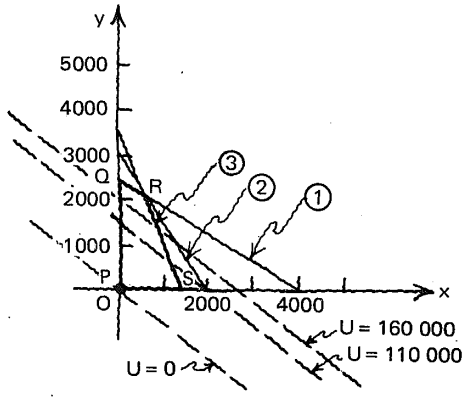


Respuesta
en el
cuadro siguiente

Atención.

¿Podríamos
trazar
la recta
que representa
la

utilidad máxima?



Véase cuadro siguiente.

222

La recta que contiene
al punto R:
(537.31, 2164.18)
y cuya ecuación es

$y = -\frac{3}{4}x + 2567.1625$

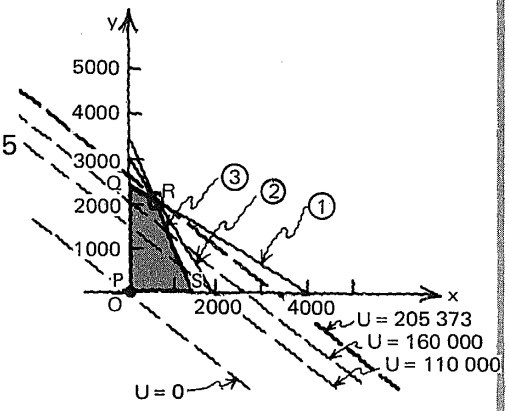
representa la

utilidad máxima

buscada:

$U = 2567.1625 \times 80$

$U = 205\,373$



223

Estado intermedio 3. Solución sujeta a comprobación.

Se necesita producir:

537.31 unidades del producto A

y

2164.18 unidades del producto B

para obtener una

utilidad máxima

igual a 205 373 pesos.

224

4. Verificación 1.

Cantidades	*Conceptos y operaciones*	*Ingredientes*		
		a	b	c
537.31	Unidades de producto A requieren			
	537.31 X 0.200	107.46		
	537.31 X 0.240		128.95	
	537.31 X 0.115			61.79
2164.18	Unidades de producto B requieren			
	2164.18 X 0.320	692.54		
	2164.18 X 0.160		346.27	
	2164.18 X 0.050			108.21
	Se requiere en total	800.00	475.22	170.00
	Se dispone de	800.00	480.00	170.00

225

4. Verificación 2.

En la venta de los As
obtenemos una utilidad de: → 537.31 X 60 = 32 238.60

En la venta de los Bs
obtenemos una utilidad de: → 2164.18 X 80 = 173 134.40

Utilidad total obtenida: $ 205 373.00

Con un poco de paciencia puede comprobarse que cualquier otra combinación de las cantidades de As y Bs, elaborados con los materiales disponibles, produce una utilidad menor.

Estado final. Solución verificada.

- Número de unidades que se requiere producir para que la utilidad sea máxima:

  de A: 537.31

  de B: 2164.18

2.12.8.1

Práctica adicional
de
resolución de problemas
cuyo enunciado
conduce a un

sistema de desigualdades de primer grado con dos incógnitas,

como modelo matemático.

2.12.8

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *aplicar* el procedimiento estudiado de resolución de problemas, a enunciados que conducen a un sistema de desigualdades de primer grado con dos incógnitas, como modelo matemático.